Die Darstellung eines Objektes aus drei photographischen Aufnahmen mit gegebenen Apparatkonstanten bei unbekannten Standpunkten.

Von der

K. Technischen Hochschule München

zur Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

(Doktor-Ingenieurs)

genehmigte Dissertation.

Vorgelegt von

Hans Riesner

Diplom-Ingenieur.

Referent:
Prof. Dr. Sebastian Finsterwalder.

Korreferent:
Prof. Dr. Max Schmidt.

München 1911

Druck: Dr. F. P. Datterer & Cie., Freising.

Die Darstellung eines Objektes aus drei photographischen Aufnahmen mit gegebenen Apparatkonstanten bei unbekannten Standpunkten.

Von der

K. Technischen Hochschule München

zur Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

(Doktor-Ingenieurs)

genehmigte Dissertation.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Vorgelegt von

Hans Riesner

Diplom-Ingenieur.

Referent:
Prof. Dr. Sebastian Finsterwalder.

Korreferent:
Prof. Dr. Max Schmidt.

München 1911

Druck: Dr. F. P. Datterer & Cie., Freising.

Inhaltsangabe.

Seite

Drei Bilder . . . . . .

§ 1. Die genäherte Orientierung gegen die Lotlinie und die Bestimmung der gegenseitigen Lage der Bilder 10

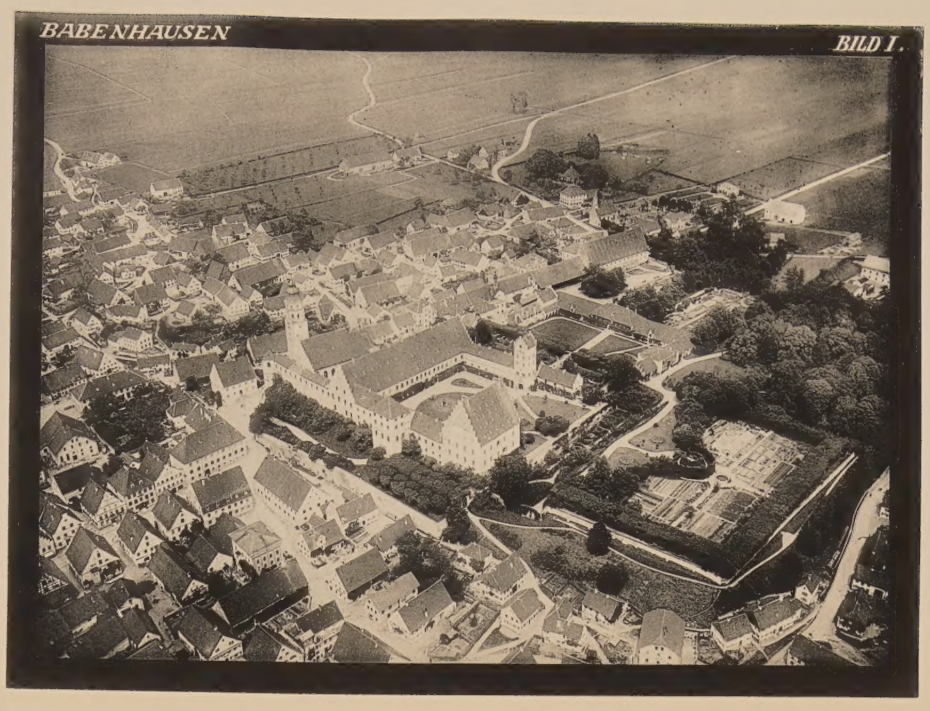
§ 2. Die Ermittelung der genäherten Kernpunkte 15

§ 3. Die Bestimmung der wahrscheinlichsten Lage der Kernpunkte aus der näherungsweise erhaltenen mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate 17

§ 4. Die Konstruktion des Objektes und der Vergleich mit direkten Messungen 35

Nachtrag 43

Eine Tafel . . . . . .


BABENHAUSEN
BILD I.

BABENHAUSEN
BILD II.

BABENHAUSEN
BILD III.

Einleitung.

Die Photogrammetrie, in deren Gebiet die vorliegende Arbeit gehört, befaßt sich mit der Aufgabe, aus photographischen Aufnahmen das abgebildete Objekt zu konstruieren.

Wie Herr Professor Finsterwalder in seiner Abhandlung „Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen“ gezeigt hat, genügen zwei Photographien, deren innere Orientierung (die Apparatkonstanten) gegeben ist, um das auf beiden abgebildete Objekt zu konstruieren. Unter der inneren Orientierung versteht man die räumliche Lage des perspektivischen Zentrums zur Bildebene. Der Maßstab des dargestellten Objektes und eine gewisse bestimmte Lage im Raum kann dabei nicht gewonnen werden. Zur Ermittelung dieser beiden Dinge müssen gewisse Beziehungen vom abgebildeten Objekt, die einen Schluß auf das Maßverhältnis ermöglichen, und Anhaltspunkte auf den Bildern, die die Richtung der Schwerkraft erkennen lassen, bekannt sein.

Hat man drei Bilder, so wird man zweimal je zwei Bilder zum Zusammenpassen bringen; das dritte Paar muß dann von selbst in die richtige gegenseitige Lage kommen. Nachdem jeder Objektpunkt mindestens zweimal abgebildet sein muß, um ihn konstruieren zu können, werden bei zwei Bildern manche Teile des Objektes nicht darzustellen sein, weil sie nur in dem einen Bild vorkommen. Bei drei Bildern dagegen können auch solche Teile des Objektes gezeichnet werden, die auf dem einen Bild nicht vorhanden sind, wenn sie nur dann in den andern beiden erscheinen. Alle anderen Objektpunkte, die auf jeder der drei Photographien abgebildet sind, werden mit viel größerer Sicherheit zu zeichnen sein, als wenn nur zwei Bilder zur Verfügung stehen. Der Vorteil

des Vorhandenseins dreier Bilder gegenüber zweien beruht aber nicht allein darauf, sondern es kann auch die Lage der drei Standpunkte gegenüber dem Objekt viel sicherer ermittelt werden, weil durch die Konstruktion des Dreiecks der drei Standpunkte bessere Kontrollen eintreten als bei zwei Standpunkten.

Die vorliegende Arbeit behandelt das Problem, aus drei photographischen Aufnahmen das Objekt darzustellen, wobei nur die innere Orientierung der Bilder gegeben ist. Als Grundlage dienten drei von Herrn Prof. Dr. Emden aufgenommene Ballonbilder des Marktes Babenhausen in Schwaben.

Es sei mir gestattet, Herrn Professor Dr. S. Finsterwalder, der mir die Bilder überließ, hiefür, wie auch für die Anregung zu dieser Arbeit und für die gütige Unterstützung bei deren Durchführung meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

An Literatur wurde benützt:

Finsterwalder, Dr. S., Professor, Die Photogrammetrie als Hilfsmittel der Geländeaufnahme.

— — Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. — Aus den Abhandlungen der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

— — Eine neue Art die Photogrammetrie bei flüchtigen Aufnahmen zu verwenden. — Separat-Abdruck aus den Sitzungsberichten der mathem. phys. Klasse der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

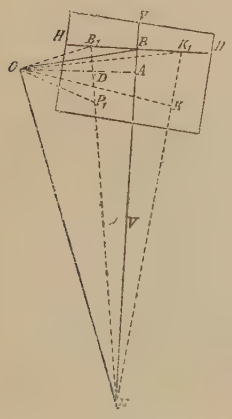
§ 1.

Die genäherte Orientierung gegen die Lotlinie und die Bestimmung der gegenseitigen Lage der Bilder.

Beim Betrachten der Bilder fällt zunächst auf, daß die vertikalen Häuserkanten nicht zu einander parallel sind, wie es sonst auf Photographien der Fall ist, sondern nach unten konvergieren. Die vertikalen Häuserkanten schneiden sich in der Natur in ihrem unendlich fernen Punkt; werden sie auf eine Bildebene projiziert, so kann man auch den unendlich fernen Schnittpunkt mitprojizieren, und die Bilder der Kanten schneiden sich dann im Bilde dieses unendlich fernen Punktes. Sein Bild ist einfach der Schnittpunkt des Lotes durch das perspektivische Zentrum mit der Bildebene, und in diesem Punkt, Nadirpunkt genannt, müssen sich alle Häuserkanten vereinigen, die in Wirklichkeit lotrecht sind. Dieser Nadirpunkt wird aufgesucht, indem man möglichst viele Häuserkanten bis zu ihrem Schnitt verlängert. Man erhält aber nicht nur einen Schnittpunkt, sondern infolge der Ungenauigkeit beim Zeichnen eine ganze Gruppe von Schnittpunkten. Es bleibt zunächst nichts übrig, als den wahrscheinlichsten Schnittpunkt nach Gutdünken auszuwählen, und ihn als Nadirpunkt zu betrachten. Bei Bild I und II läßt sich diese Methode noch ganz gut anwenden; bei Bild III wird der so gefundene Nadirpunkt schon recht unsicher, es soll hiefür ein besseres Verfahren Anwendung finden.

Es seien folgende allgemeine Begriffe vorausgeschickt: Der Fußpunkt der Senkrechten durch das perspektivische Zentrum (O) auf die Bildebene heißt Hauptpunkt (A), sein Abstand die Bildweite (D), die Lotebene durch Zentrum und

Hauptpunkt schneidet die Bildebene in der Hauptvertikalen ($V\,V$) und die horizontale Ebene durch das Zentrum schneidet die Bildebene im Horizont ($H\,H$).



Dieser Horizont im photogrammetrischen Sinne und der auf Bild III abgebildete geographische Horizont stimmen so ziemlich überein, was natürlich nicht immer der Fall zu sein braucht. Zur genäherten Bestimmung des Nadirpunktes im Bild III gehen wir vom abgebildeten Horizont aus. Nachdem der Hauptpunkt A und die Bildweite $A\,O = D$ (innere Orientierung) gegeben ist, braucht nur das rechtwinklige Dreieck $N\,O\,B$ in die Bildebene umgeklappt zu werden, um den Nadirpunkt N zeichnen zu können, wobei noch zu berücksichtigen ist, daß $N\,B$ und $H\,H$ aufeinander senkrecht stehen.

Die genäherte Orientierung der drei Bilder gegen die Lotlinie wäre damit gefunden.

Zur Aufsuchung der gegenseitigen Lage der Bilder kann eine Methode benützt werden, die Herr Professor Dr. Finsterwalder in seiner Abhandlung „Eine neue Art die Photogrammetrie bei flüchtigen Aufnahmen zu verwenden“ angegeben hat. Diese Methode möge hier kurz erwähnt sein.

Man denke sich zunächst zwei Aufnahmen mit ihren Strahlbündeln in die richtige gegenseitige Lage gebracht. Dann wähle man irgend einen festen Punkt O und in einem festen Abstand davon eine horizontale Ebene (Bezugsebene). Verschiebt man die Strahlen, die von den perspektivischen Zentren zu einem bestimmten Objektpunkt hingehen parallel, bis sie durch O gehen, so erzeugen sie in der Bezugsebene zwei Schnittpunkte. Die beiden Schnittpunkte bilden die Spur einer Ebene, die durch O geht und zur Ebene durch die beiden Zentren und den Objektpunkt parallel ist. Für

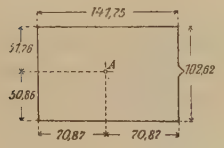
einen anderen Objektpunkt kann man es genau so machen, ebenso für einen dritten und vierten Objektpunkt. Die Verbindungsgeraden je zweier zusammengehöriger Schnittpunkte müssen dann durch einen und denselben Punkt gehen, und das ist der Schnittpunkt einer Geraden, die zur Verbindungslinie der beiden Zentren parallel ist und durch den festen Punkt *O* geht. Haben wir drei Objektpunkte so verwendet, so bilden die Schnittpunkte in der Bezugsebene, die von dem einen Bild herrühren ein Dreieck, und die Schnittpunkte vom anderen Bild herrührend auch, und diese beiden Dreiecke liegen so, daß sich die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken in einem Punkt schneiden.

Für jedes Bild gesondert kann man ein solches Dreieck zeichnen, wenn die Orientierung gegen die Lotlinie bekannt ist. Ein Zusammenpassen der beiden Bilder ist erreicht, sobald man das eine Dreieck gegen das andere um die Projektion von *O* auf die Bezugsebene so gedreht hat, daß die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken sich in einem Punkt schneiden. Es läßt sich das mit Hilfe von Pauspapier leicht graphisch durchführen. Mit zwei anderen Bildern kann man es genau so machen, und beim dritten Bilderpaar muß dann die Bedingung von selbst erfüllt sein. Man hat außerdem noch eine Kontrolle insoferne, als die drei gefundenen Schnittpunkte auf einer Geraden liegen müssen. Es ist das die Schnittgerade der Bezugsebene mit einer Ebene die durch den festen Punkt *O* geht und zur Ebene der drei Zentren parallel ist.

Auf diese Weise ist die gegenseitige Lage der drei Standpunkte bis auf den Maßstab festgelegt, denn die drei Strahlen von *O* zu den gefundenen drei Schnittpunkten geben die Richtung der Dreieckseiten, des durch die Standpunkte gebildeten Dreiecks.

Dieses Verfahren wurde aber nicht angewendet, sondern es wurde zur Bestimmung der gegenseitigen Lage der Standpunkte das vom K. Bayer. Katasterbüro herausgegebene Ortsblatt „Babenhausen“ verwendet.

Die innere Orientierung, die gegeben ist, und die man dabei braucht, erhält man aus den Abmessungen eines rechteckigen Rahmens, der sich im Innern des photographischen Apparates befindet, und dessen Rand bei der Aufnahme mit abgebildet wird. Seine Abmessungen, sowie die Lage des Hauptpunktes sind aus der Abbildung zu ersehen. Der senkrechte Abstand des perspektivischen Zentrums von der Rahmenebene beträgt 149 mm. Die Abbildung des Rahmens auf der Photographie hat nun etwas andere Abmessungen, weil die lichtempfindliche Platte nicht dicht am Rahmen anliegt, und weil die Papierkopie einen Eingang erfährt. Ein Rechteck, das dem Rahmenrechteck ähnlich ist und dabei in seiner Größe den abgebildeten Rahmenrechtecken auf den drei Photographien möglichst nahe kommt, hat beistehende Abmessungen:



Die zugehörige Bildweite beträgt 151 mm.

Auf dieses Reckteck wurden die drei Bildränder transformiert. An den Maßen, die aus den Bildern herausgegriffen wurden, waren dabei Verbesserungen anzubringen, die in der horizontalen Richtung höchstens $-1{,}2\,{}^0/_{00}$ und in der vertikalen Richtung höchstens $+1{,}5\,{}^0/_{00}$ betrugen.

Nachdem die genäherten Nadirpunkte der drei Bilder festgelegt sind, konstruiert man in jedem Bild den Horizont $H\,H$ mit Hilfe der inneren Orientierung. Man kann dann jeden Strahl, der vom perspektivischen Zentrum durch den Bildpunkt zum zugehörigen Objektpunkt hingeht, orthogonal auf die durch Zentrum und Horizont gelegte horizontale Ebene projizieren. Man legt eine Lotebene durch Zentrum

und Bildpunkt; ihr Schnitt mit der Bildebene ist die Verbindungsgerade des Nadirpunktes mit dem Bildpunkt. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Horizont wird mit dem Zentrum verbunden, und diese Gerade stellt dann die gesuchte Orthogonalprojektion des betreffenden Bildstrahles dar. Führt man das für mehrere Bildpunkte durch, so erhält man in der genannten horizontalen Ebene, die man in die Bildebene umklappt, ein Strahlbüschel mit dem Zentrum als Träger.

Wäre der Grundriß des perspektivischen Zentrums auf dem Katasterblatt bekannt, so könnte man von ihm aus zu den Grundrißpunkten der vorhin behandelten Objektpunkte Strahlen ziehen, und dieses Strahlenbüschel müßte dem aus der Photographie gewonnenen Strahlbüschel kongruent sein.

Es wurden in jedem Bilde 5 Punkte ausgesucht, deren entsprechende Grundrißpunkte im Katasterblatt scharf zu finden waren und das zugehörige Strahlbüschel konstruiert. Dieses auf Pauspapier gezeichnete Strahlbüschel wurde auf dem Katasterblatt solange verschoben, bis jeder Strahl möglichst genau durch seinen zugehörigen Grundrißpunkt ging. Die Lage des Strahlbüschelträgers ergab dann den genäherten Grundriß des betreffenden perspektivischen Zentrums. Auf diese Weise wurden die Grundrisse der drei Standpunkte und die Orientierung gegen die Blattränder gefunden.

Die Strahlbüschel ließen sich sehr gut in das Katasterblatt einpassen; die näher gelegenen Punkte kamen genau in ihre Strahlen zu liegen, der entfernteste Punkt lag höchstens 1 mm seitlich von seinem Strahl. Der Papiereingang des Katasterblattes war dabei zu berücksichtigen. Zur Lösung wäre ein Büschel von drei Strahlen ausreichend gewesen; zwecks größerer Genauigkeit wurden jedoch 5—7 Strahlen verwendet.

Die Ermittelung der Höhenunterschiede der drei Standpunkte bietet keine Schwierigkeiten mehr. Man wählt hiezu einen solchen Objektpunkt aus, der bei den drei Bildern Verwendung gefunden hat. Das in einer Lotebene liegende rechtwinklige Dreieck $N\,O\,B$ (siehe Figur auf Seite 8), wird

in die Zeichenebene umgeklappt und liefert mit dem Winkel $B_1 O P_1$ unmittelbar die Neigung des Bildstrahles gegen die Horizontale. Die Neigungswinkel der zu einem und demselben Objektpunkt hingehenden Bildstrahlen sind damit bekannt; die Entfernung dieses Objektpunktes von den drei Standpunkten liefert in der Horizontalprojektion das Katasterblatt; damit kann der Höhenunterschied der drei Standpunkte aus rechtwinkligen Dreiecken ermittelt werden.

Diese Methode der Auffindung der gegenseitigen Lage der Bilder hat gegenüber der erstgenannten den Nachteil, daß mindestens drei Objektpunkte in ihrem Grundriß bekannt sein müssen, während im anderen Fall vom abgebildeten Objekt keinerlei Beziehung bekannt zu sein braucht, mit Ausnahme des Maßstabes.

In vielen Fällen wird aber der Grundriß dreier oder mehrerer Punkte, die einem abgebildeten Komplex angehören bekannt sein, und dann führt die letzte Methode doch rascher zum Ziel und ermöglicht eine größere Genauigkeit als die erstgenannte.

§ 2.

Die Ermittelung der genäherten Kernpunkte.

Wollte man die genäherten Standpunkte sofort zur Konstruktion des Objektes benützen, so würde das Resultat recht ungenau werden. Man hat vielmehr die äußere Orientierung (Lage der Bildebene im Raum) und die gegenseitige Lage der Standpunkte einer Verbesserung zu unterziehen und das geschieht mit Hilfe der gegnerischen Kernpunkte.

Unter den Kernpunkten versteht man die Abbildungen der anderen Standpunkte auf die erweiterte Ebene des einen photographischen Bildes. Verbindet man also zwei Standpunkte miteinander, so erhält man auf den zwei zugehörigen Bildebenen Schnittpunkte, die Kernpunkte. Die darstellende geometrische Konstruktion eines Kernpunktes ergibt sich wie folgt:

In das Strahlbüschel, das man zur Aufsuchung des Grundrisses eines Standpunktes im Katasterblatt benützt hat, kann man auch den Strahl einzeichnen, der zum Grundriß eines anderen Standpunktes hingeht. Diesen Strahl kann man auch in das in der Horizontalebene gelegene kongruente Strahlbüschel eintragen, das aus dem photographischen Bild gewonnen wurde, und seinen Schnittpunkt K_1 mit dem Horizont bestimmen. Dieser Schnittpunkt K_1 gibt mit dem Nadirpunkt verbunden die Schnittgerade der Bildebene mit der durch die zwei Standpunkte gelegten Lotebene. Auf dieser Schnittgeraden NK_1 muß der Kernpunkt K liegen. Die Lotebene enthält nun ein rechtwinkliges Dreieck NOK_1 mit dem rechten Winkel bei O. Klappt man dieses rechtwinklige Dreieck um die Seite NK_1 in die Bildebene um, so kann man von O aus den Verbindungsstrahl zu dem anderen Standpunkt ziehen, denn er liegt auch in dieser Lotebene, und seine Neigung gegen die Horizontale ist durch die bekannte gegenseitige Lage und durch den bekannten Höhenunterschied der beiden Standpunkte gegeben. Der Schnittpunkt dieses Strahles mit der Seite NK_1 ist der Kernpunkt K. Der dazu gegnerische Kernpunkt im anderen Bild wird ebenso ermittelt. Auf diese Weise wurden die genäherten Kernpunkte der Bilderpaare I—II und I—III gefunden.

Die Verwendung der Kernpunkte vermittelt folgende Überlegung:

Denkt man sich durch die Verbindungsgerade zweier Standpunkte Ebenen gelegt, die noch je durch einen Objektpunkt gehen, so erhält man ein Ebenenbüschel mit der Verbindungsgeraden als Träger. Das Schnittgebilde dieses Ebenenbüschels (Kernebenenbüschel) mit jeder der beiden Bildebenen ist ein Strahlbüschel (Kernstrahlbüschel) mit dem Kernpunkt als Träger und mit Strahlen (Kernstrahlen), die durch die Bilder der betreffenden Objektpunkte gehen. Man kann dieses Kernstrahlbüschel in jedem der zwei zusammengehörenden Bilder zeichnen, wenn die beiden gegnerischen Kernpunkte bekannt sind. Projiziert man ein solches Strahl-

büschel auf eine Ebene, die zur Verbindungsgeraden des Kernpunktes mit dem perspektivischen Zentrum senkrecht steht, so müssen diese in den beiden Bildern gewonnenen Projektionen einander kongruent sein; denn sie stellen beide den Normalschnitt des gemeinsamen Kernebenenbüschels dar. Nachdem aber unsere Kernpunkte nur annähernd richtig sind, werden auch diese beiden Strahlbüschel nur annähernd kongruent sein; die Winkel entsprechender Strahlen werden kleine Unterschiede zeigen. Es wird jetzt die Forderung gestellt, diese Unterschiede durch passende Verschiebung der beiden Kernpunkte zu einem Minimum zu machen.

Die Art und Weise wie die genäherten Kernpunkte beim genauen Zusammenpassen zweier Bilder zu verwenden sind, hat Herr Professor Dr. Finsterwalder in seiner Abhandlung: „Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen“ dargelegt und der dort gezeigte Weg soll hier eingeschlagen werden.

§ 3.

Die Bestimmung der wahrscheinlichsten Lage der Kernpunkte aus der näherungsweise erhaltenen mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Es wurden die Kernebenenbüschel von Bild I und II und diejenigen von Bild I und III zur möglichsten Übereinstimmung gebracht.

A. Ausgleichung der Kernpunkte von Bild I und II.

Nachdem die genäherten Kernpunkte der Bilder I und II zeichnerisch festgelegt waren, wurden in beiden Bildern sieben einander entsprechende Punkte, möglichst über das ganze Bild verteilt, die recht scharf zu erkennen waren, deren Bedeutung aber sonst nebensächlich war, ausgewählt und ihre rechtwinkeligen Abstände von den Bildrändern mit dem Transversalmaßstab abgegriffen. Der benützte Transversalmaßstab ermöglichte die Zehntel-Millimeter sicher ab-

zulesen und die Hundertstel-Millimeter noch zu schätzen. Dann wurden diese Abstände in der auf Seite 10 besprochenen Weise auf die zur Bildweite von 151 mm gehörige Ebene transformiert und ein Achsensystem parallel den Bildrändern so gelegt, daß es den Hauptpunkt als Ursprungspunkt hatte. Die Koordinaten des genäherten Kernpunktes K_{I-II} ergaben sich aus dem Zeichenblatt (Tafel). Die Koordinaten des genäherten Kernpunktes K_{II-I} auf Bild II (Tafel) konnten nicht ohne weiteres gemessen werden. Dieser Kernpunkt fällt sehr weit über das Zeichenblatt heraus, so daß seine Lage zeichnerisch nur durch den Schnitt zweier Geraden dargestellt werden konnte. Die Gleichungen dieser zwei Geraden wurden aufgestellt, und so mit Hilfe der analytischen Geometrie die Koordinaten des Schnittpunktes K_{II-I} bestimmt.

Abmessungen im Bild I.

Punkt		Bildrandabstände, aus dem Bild abgegriffen mm			Rahmenabstände, auf eine Bildweite von 151 mm reduziert mm		
		Linker unterer Rand	Rechter oberer Rand	Bildbreite	Linker unterer Rand	Rechter oberer Rand	Rahmenbreite
4	x	64,05	79,65	143,70	64,03	79,62	143,65
	y	86,25	17,70	103,95	86,29	17,71	104,00
1	x	18,45	125,25	143,70	18,44	125,21	143,65
	y	80,35	23,55	103,90	80,43	23,57	104,00
5	x	103,25	40,45	143,70	103,21	40,44	143,65
	y	56,15	47,75	103,90	56,20	47,80	104,00
6	x	88,65	55,05	143,70	88,62	55,03	143,65
	y	49,55	54,40	103,95	49,57	54,43	104,00
2	x	34,70	109,00	143,70	34,69	108,96	143,65
	y	37,90	66,05	103,95	37,92	66,08	104,00
3	x	17,20	126,55	143,75	17,19	126,46	143,65
	y	10,05	93,85	103,90	10,06	93,94	104,00
7	x	80,70	63,05	143,75	80,64	63,01	143,65
	y	13,70	90,20	103,90	13,71	90,29	104,00
*K_{I-II}	x	315,37	—171,66	143,71	315,22	—171,58	143,64
	y	56,80	47,12	103,92	56,84	47,16	104,00

*) Genäherter Kernpunkt K_{I-II}.

Abmessungen im Bild II.

Punkt		Bildrandabstände, aus dem Bild abgegriffen mm			Rahmenabstände, auf eine Bildweite von 151 mm reduziert mm		
		Linker unterer Rand	Rechter oberer Rand	Bildbreite	Linker unterer Rand	Rechter oberer Rand	Rahmenbreite
4	x	123,45	20,25	143,70	123,41	20,24	143,65
	y	82,50	21,35	103,85	82,62	21,38	104,00
1	x	72,95	70,75	143,70	72,92	70,73	143,65
	y	80,95	22,90	103,85	81,07	22,93	104,00
5	x	127,15	16,50	143,65	127,15	16,50	143,65
	y	46,30	57,60	103,90	46,34	57,66	104,00
6	x	96,55	47,10	143,65	96,55	47,10	143,65
	y	43,80	60,05	103,85	43,86	60,14	104,00
2	x	41,45	102,20	143,65	41,45	102,20	143,65
	y	44,35	59,55	103,90	44,39	59,61	104,00
3	x	3,85	139,85	143,70	3,85	139,80	143,65
	y	26,05	77,80	103,85	26,09	77,91	104,00
7	x	49,05	94,65	143,70	49,03	94,62	143,65
	y	9,45	94,40	103,85	9,46	94,54	104,00
*K_{II-I}	x	—4924,48	5068,16	143,68	—4923,11	5066,75	143,64
	y	975,10	—871,24	103,86	976,41	—872,41	104,00

Um die Winkel der beiden Strahlbüschel, die zum Vergleich und zur möglichsten Übereinstimmung gebracht werden sollen, berechnen zu können, dreht man in jedem Bild das Achsensystem um den Hauptpunkt, bis die x-Achse durch den Kernpunkt geht. Die Formeln, nach welchen die Koordinaten transformiert werden, lauten:

$$x = x' \cdot \cos\psi + y' \cdot \sin\psi$$
$$y = y' \cdot \cos\psi - x' \cdot \sin\psi.$$

*) Genäherter Kernpunkt K_{II-I}.

Koordinaten im Bild I.

Punkt		Vor der Drehung	Nach der Drehung
4	x	— 7,79	— 7,03
	y	+ 34,75	+ 34,92
1	x	— 53,38	— 52,74
	y	+ 28,89	+ 30,05
5	x	+ 31,39	+ 31,49
	y	+ 4,66	+ 3,98
6	x	+ 16,80	+ 16,76
	y	— 1,97	— 2,34
2	x	— 37,13	— 37,43
	y	— 13,62	— 12,81
3	x	— 54,63	— 55,52
	y	— 41,48	— 40,29
7	x	+ 8,82	+ 8,00
	y	— 37,83	— 38,02
$*K_{I-II}$	x	+ 243,4	+ 243,46
	y	+ 5,3	± 0

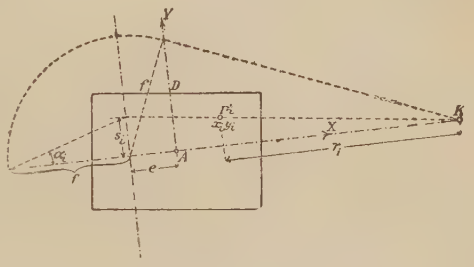
$$tg\,\psi = +\frac{5{,}3}{243{,}4}$$

Koordinaten im Bild II.

Punkt		Vor der Drehung	Nach der Drehung
4	x	+ 51,59	+ 45,06
	y	+ 31,08	+ 39,95
1	x	+ 1,10	— 4,30
	y	+ 29,53	+ 29,23
5	x	+ 55,33	+ 55,34
	y	— 5,20	+ 4,96
6	x	+ 24,73	+ 25,71
	y	— 7,68	— 3,05
2	x	— 30,37	— 28,54
	y	— 7,15	— 12,56
3	x	— 67,97	— 62,17
	y	— 25,45	— 37,39
7	x	— 22,79	— 14,74
	y	— 42,08	— 45,52
$*K_{II-I}$	x	—4994,93	—5079,83
	y	+ 924,87	± 0

$$tg\,\psi = -\frac{924{,}87}{4994{,}93}$$

Der Winkel α_i der Kernebene irgend eines Objektpunktes P_i mit der Ebene, die durch Hauptpunkt, Kernpunkt und Zentrum geht, wird wie folgt gefunden:



$$A\,K = r; \quad e = \frac{D^2}{r};$$

$$f = \sqrt{e\cdot(e+r)} = \frac{D}{r}\cdot\sqrt{D^2+r^2}; \quad r_i = r - x_i;$$

$$s_i = (e+r)\,\frac{y_i}{r_i} = \frac{1}{r}\cdot(D^2+r^2)\cdot\frac{y_i}{r-x_i}$$

$$tg\,\alpha_i = \frac{s_i}{f} = \sqrt{1+\left(\frac{r}{D}\right)^2}\cdot\frac{y_i}{r-x_i}.$$

Die Winkel α_i der beiden Bilder können aber noch nicht zum Vergleich gebracht werden, denn die Ebenen durch Kernpunkt, Hauptpunkt und Zentrum, auf die sie bezogen

sind, sind keine entsprechenden Kernebenen. Man bildet nun neue Winkel ${}_0\alpha_i$, indem man das arithmetische Mittel aller α_i eines Bildes von den einzelnen α_i abzieht.

$$ {}_0\alpha_i = \alpha_i - \frac{\Sigma\alpha_i}{7} $$

Diese Winkel ${}_0\alpha_i$ von beiden Bildern können nun miteinander verglichen werden. Wie aus den folgenden Tabellen ersichtlich ist, beträgt der größte Unterschied zweier entsprechender Winkel ca. $^1/_4{}^0$.

Man hätte auch irgendeine Kernebene auswählen und ihre Winkel gegen die anderen Kernebenen aus beiden Bildern vergleichen können; bei der später folgenden Ausgleichung erscheint es aber nicht angezeigt, irgend einer Kernebene in diesem Sinne einen Vorzug zu geben.

Die Koordinaten der Kernpunkte sind jetzt zu ändern und dafür neue Winkel ${}_0\alpha_i$ zu rechnen. Unter der für kleine Kernpunktsänderungen zutreffenden Voraussetzung, daß die Änderungen der Winkel ${}_0\alpha_i$ den Änderungen der Kernpunkts-Koordinaten proportional sind, lassen sich dann lineare Gleichungen aufstellen, die die Kongruenz der beiden Kernebenenbüschel ausdrücken.

Die Kernpunkte wurden also zuerst in der x-Richtung um ein gewisses Maß verschoben und die Kernebenenwinkel ${}_0\alpha_i$ aufs neue gerechnet. Man wird das Maß der Verschiebung recht klein wählen, jedoch so, daß die Änderung ${}_x\delta\alpha_i$ der einzelnen Kernebenenwinkel möglichst noch $^1/_{100}{}^0$ beträgt.

In Bild I wurde der Kernpunkt $K_{\text{I}-\text{II}}$ in der x-Richtung um $+$ 10 mm verschoben, der Kernpunkt $K_{\text{II}-\text{I}}$ in Bild II dagegen, dessen Entfernung vom Hauptpunkt über 5 m beträgt, um $+$ 400 mm. Die Änderungen der Kernebenenwinkel im letzteren Bild sind dabei noch so klein, daß man sie passend mit 10 multipliziert; sie entsprechen dann einer Verschiebungseinheit von 4000 mm.

Bei der Verschiebung der Kernpunkte in der y-Richtung muß man auch das Koordinatensystem mitdrehen, sodaß die x-Achse auch nach der Verschiebung wieder durch den Kernpunkt geht. Kernpunkt $K_{\text{I}-\text{II}}$ auf Bild I wurde in der y-Richtung

um + 5 mm verschoben, Kernpunkt K_{II-I} auf Bild II um + 100 mm.

Die Größen der geänderten Kernebenenwinkel und ihre Differenzen ${}_x\delta\alpha_i$ und ${}_y\delta\alpha_i$ zeigen die folgenden Tabellen.

Kernebenenwinkel im Bild I (Gradmaß).

Punkt	${}_0^{\alpha_i}$ für den genäherten Kernpunkt K_{I-II}	${}_0^{\alpha_i}$ für eine Verschiebung von + 10 mm in der x-Richtung	${}_0^{\alpha_i}$ für eine Verschiebung von + 5 mm in der y-Richtung	${}_x\delta\alpha_i$	${}_y\delta\alpha_i$
4	+ 16,°1992	+ 16,°0512	+ 16,°1933	— 0,°1480	— 0,°0059
1	+ 12,°2791	+ 12,°2283	+ 12,°5816	— 0,°0508	+ 0,°3025
5	+ 3,°4246	+ 3,°3804	+ 2,°9893	— 0,°0442	— 0,°4353
6	+ 0,°2626	+ 0,°2673	— 0,°0029	+ 0,°0047	— 0,°2655
2	— 3,°5607	— 8,°5440	— 3,°3632	+ 0,°0167	+ 0,°1975
3	— 12,°9571	— 12,°9196	— 12,°6334	+ 0,°0375	+ 0,°3237
7	— 15,°6477	— 15,°4639	— 15,°7647	+ 0,°1838	— 0,°1170

Kernebenenwinkel im Bild II (Gradmaß).

Punkt	${}_0^{\alpha'_i}$ für den genäherten Kernpunkt K_{II-I}	${}_0^{\alpha'_i}$ für eine Verschiebung von + 400 mm in der x-Richtung	${}_0^{\alpha'_i}$ für eine Verschiebung von + 100 mm in der y-Richtung	${}_x\delta\alpha'_i$	${}_y\delta\alpha'_i$
4	+ 16,°0311	+ 16,°0264	+ 16,°3220	— 0,°0047	+ 0,°2909
1	+ 12,°2994	+ 12,°3058	+ 12,°2512	+ 0,°0064	— 0,°0482
5	+ 3,°1920	+ 3,°1951	+ 3,°5805	+ 0,°0031	+ 0,°3885
6	+ 0,°1783	+ 0,°1834	+ 0,°3504	+ 0,°0051	+ 0,°1721
2	— 3,°4536	— 3,°4515	— 3,°6859	+ 0,°0021	— 0,°2323
3	— 12,°7490	— 12,°7599	— 13,°2042	— 0,°0109	— 0,°4552
7	— 15,°4984	— 15°,4993	— 15,°6140	— 0,°0009	— 0,°1156

Die neuen Kernebenenwinkel des Bildes I, an denen man durch Verschiebung des genäherten Kernpunktes im Sinne der beiden Achsen Verbesserungen anbringt, müssen

nun den ähnlich verbesserten Kernebenenwinkeln des Bildes II möglichst gleich werden.

Die Gleichung dafür lautet:

$${}_0\alpha_i + {}_x\delta\alpha_i \cdot X + {}_y\delta\alpha_i \cdot Y = {}_0\alpha'_i + {}_x\delta\alpha'_i \cdot X' + {}_y\delta\alpha'_i \cdot Y' + v_i$$

X, Y, X' und Y' sind die Koordinaten der ausgeglichenen Kernpunkte $K_{\text{I}-\text{II}}$ und $K_{\text{II}-\text{I}}$ von den genäherten Kernpunkten aus gemessen und auf das Maß der jeweiligen Verschiebung als Einheit bezogen.

v_i ist der Widerspruch, der nach der Verbesserung der Kernpunkte zwischen den Kernebenenwinkeln der beiden Bilder noch besteht. Den 7 Kernebenen entsprechend kann man 7 solche Gleichungen bilden mit den 4 Unbekannten X, Y, X' und Y', die man auf die Form bringen kann:

$$\begin{aligned}
a_1 \cdot X + b_1 \cdot Y + c_1 \cdot X' + d_1 \cdot Y' + l_1 &= v_1 \\
a_2 \cdot X + b_2 \cdot Y + c_2 \cdot X' + d_2 \cdot Y' + l_2 &= v_2 \\
a_3 \cdot X + b_3 \cdot Y + c_3 \cdot X' + d_3 \cdot Y' + l_3 &= v_3 \\
\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot & \\
\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot & \\
\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot & \\
a_7 \cdot X + b_7 \cdot Y + c_7 \cdot X' + d_7 \cdot Y' + l_7 &= v_7
\end{aligned}$$

Wir stellen die Forderung, daß die 4 Unbekannten so zu ermitteln sind, daß die Summe der Quadrate dieser v_i ein Minimum wird. Diese 7 Gleichungen sind dann als Fehlergleichungen zu betrachten, aus denen wir nach der Methode der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen die 4 Normalgleichungen bilden und sie nach den 4 Unbekannten auflösen können.

Die 4 Normalgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
[a \cdot a] \cdot X + [a\,b] \cdot Y + [a\,c] \cdot X' + [a\,d] \cdot Y' + [a \cdot l] &= 0 \\
[a\ \ b] \cdot X + [b\,b] \cdot Y + [b\,c] \cdot X' + [b\,d] \cdot Y' + [b\ \ l] &= 0 \\
[a\ \ c] \cdot X + [b\,c] \cdot Y + [c\,c] \cdot X' + [c\,d] \cdot Y' + [c\ \ l] &= 0 \\
[a\ \ d] \cdot X + [b\,d] \cdot Y + [c\,d] \cdot X' + [d\,d] \cdot Y' + [d\ \ l] &= 0
\end{aligned}$$

Die 7 Fehlergleichungen zahlenmäßig angeschrieben lauten:

$$-0{,}1480\,X - 0{,}0059\,Y + 0{,}0470\,X' - 0{,}2909\,Y' + 0{,}1681 = v_4$$
$$-0{,}0508\,X + 0{,}3025\,Y - 0{,}0640\,X' + 0{,}0482\,Y' - 0{,}0203 = v_1$$
$$-0{,}0442\,X - 0{,}4353\,Y - 0{,}0310\,X' - 0{,}3885\,Y' + 0{,}2326 = v_5$$
$$+0{,}0047\,X - 0{,}2655\,Y - 0{,}0510\,X' - 0{,}1721\,Y' + 0{,}0843 = v_6$$
$$+0{,}0167\,X + 0{,}1975\,Y - 0{,}0210\,X' + 0{,}2323\,Y' - 0{,}1071 = v_2$$
$$+0{,}0375\,X + 0{,}3237\,Y + 0{,}1090\,X' + 0{,}4552\,Y' - 0{,}2081 = v_3$$
$$+0{,}1838\,X - 0{,}1170\,Y + 0{,}0090\,X' + 0{,}1156\,Y' - 0{,}1493 = v_7$$

Die Koeffizienten der Normalgleichungen wurden mit dem großen 50 cm langen Rechenschieber ermittelt. Von Vorteil war dabei, daß die Koeffizienten der Fehlergleichungen in ihrer Stellenzahl einander möglichst gleich waren, ein Umstand, den man durch passende Wahl der Verschiebungseinheiten erreicht hatte. Die gefundenen Normalgleichungen heißen:

$$+0{,}06193\,X - 0{,}00257\,Y + 0{,}00282\,X' + 0{,}09922\,Y' - 0{,}07077 = 0$$
$$-0{,}00257\,X + 0{,}50897\,Y + 0{,}03749\,X' + 0{,}41081\,Y' - 0{,}20183 = 0$$
$$+0{,}00282\,X + 0{,}03749\,Y + 0{,}02227\,X' + 0{,}04984\,Y' - 0{,}02409 = 0$$
$$+0{,}09922\,X + 0{,}41081\,Y + 0{,}04984\,X' + 0{,}54202\,Y' - 0{,}29160 = 0$$

Die Auflösung wurde mit Hilfe des Gaußschen Reduktionsverfahrens vorgenommen. Man erhielt für die Unbekannten die Werte:

$$X = +0{,}8174 \qquad X' = +0{,}1406$$
$$Y = +0{,}2241 \qquad Y' = +0{,}2058$$

Auf den Millimeter-Maßstab umgerechnet:

$$X = +8{,}17\text{ mm} \qquad X' = +562{,}4\text{ mm}$$
$$Y = +1{,}12\text{ mm} \qquad Y' = +20{,}58\text{ mm}$$

Der große Wert von X' wird vermieden, wenn statt des Kernpunktes der Strahl vom perspektivischen Zentrum nach dem Kernpunkt eingeführt und durch passende Winkel festgelegt wird. Vgl. S. 40 Nachtrag.

Durch Einsetzen der gefundenen Werte der Unbekannten in die Fehlergleichungen kann man die v_i rechnen. Rechnet man für die ausgeglichenen Kernpunkte die Kernebenenwinkel in beiden Bildern, so müssen ihre Differenzen V_i den v_i gleich werden.

Die Kernebenenwinkel nach der Ausgleichung.

Kern-ebene	Bild I	Bild II	v_i aus den Fehler-gleichungen	V_i aus der Neu-rechnung mit den verbesserten Kernpunkten
4	+16,°0757	+16,°0936	− 0,°0075	− 0,°0179
1	+12,°3006	+12,°2969	+ 0,°0069	+ 0,°0037
5	+ 3,°2951	+ 3,°2856	+ 0,°0146	+ 0,°0095
6	+ 0,°2110	+ 0,°2263	− 0,°0139	− 0,°0153
2	− 3,°5030	− 3,°5045	− 0,°0043	+ 0,°0015
3	−12,°8550	−12,°8699	+ 0,°0041	+ 0,°0149
7	−15,°5241	−15,°5281	− 0,°0002	+ 0,°0040

$$[v\,v] = 0{,}00054649\,;$$
$$[V\,V] = 0{,}0008985.^*)$$

Der mittlere Fehler einer Kernebenenrichtung ist:

$$m = \sqrt{\frac{[V\,V]}{7-4}} = \sqrt{\frac{0{,}0008985}{3}} = \pm\, 0{,}°0173 = \pm\, 1',038.$$

Zur Berechnung der mittleren Fehler der Kernpunktskoordinaten hat man noch 4 Systeme von je 4 Normalgleichungen aufzulösen, die wie folgt lauten:

$$[a\,a]\,Q_{11} + [a\,b]\,Q_{12} + [a\,c]\,Q_{13} + [a\,d]\,Q_{14} - 1{,}0 = 0$$
$$[a\,b]\,Q_{11} + [b\,b]\,Q_{12} + [b\,c]\,Q_{13} + [b\,d]\,Q_{14} + 0{,}0 = 0$$
$$[a\,c]\,Q_{11} + [b\,c]\,Q_{12} + [c\,c]\,Q_{13} + [c\,d]\,Q_{14} + 0{,}0 = 0$$
$$[a\,d]\,Q_{11} + [b\,d]\,Q_{12} + [c\,d]\,Q_{13} + [d\,d]\,Q_{14} + 0{,}0 = 0$$

$$[a\,a]\,Q_{21} + [a\,b]\,Q_{22} + [a\,c]\,Q_{23} + [a\,d]\,Q_{24} + 0{,}0 = 0$$
$$[a\,b]\,Q_{21} + [b\,b]\,Q_{22} + [b\,c]\,Q_{23} + [b\,d]\,Q_{24} - 1{,}0 = 0$$
$$[a\,c]\,Q_{21} + [b\,c]\,Q_{22} + [c\,c]\,Q_{23} + [c\,d]\,Q_{24} + 0{,}0 = 0$$
$$[a\,d]\,Q_{21} + [b\,d]\,Q_{22} + [c\,d]\,Q_{23} + [d\,d]\,Q_{24} + 0{,}0 = 0$$

$$[a\,a]\,Q_{31} + [a\,b]\,Q_{32} + [a\,c]\,Q_{33} + [a\,d]\,Q_{34} + 0{,}0 = 0$$
$$[a\,b]\,Q_{31} + [b\,b]\,Q_{32} + [b\,c]\,Q_{33} + [b\,d]\,Q_{34} + 0{,}0 = 0$$
$$[a\,c]\,Q_{31} + [b\,c]\,Q_{32} + [c\,c]\,Q_{33} + [c\,d]\,Q_{34} - 1{,}0 = 0$$
$$[a\,d]\,Q_{31} + [b\,d]\,Q_{32} + [c\,d]\,Q_{33} + [d\,d]\,Q_{34} + 0{,}0 = 0$$

*) An der geringen Übereinstimmung ist der Umstand schuld, daß bei der Zahlenrechnung der Rechenschieber benützt wurde, der die letzten Stellen nur unsicher gibt.

$$[a\,a]\,Q_{41} + [a\,b]\,Q_{42} + [a\,c]\,Q_{43} + [a\,d]\,Q_{44} + 0{,}0 = 0$$
$$[a\,b]\,Q_{41} + [b\,b]\,Q_{42} + [b\,c]\,Q_{43} + [b\,d]\,Q_{44} + 0{,}0 = 0$$
$$[a\,c]\,Q_{41} + [b\,c]\,Q_{42} + [c\,c]\,Q_{43} + [c\,d]\,Q_{44} + 0{,}0 = 0$$
$$[a\,d]\,Q_{41} + [b\,d]\,Q_{42} + [c\,d]\,Q_{43} + [d\,d]\,Q_{44} - 1{,}0 = 0$$

Die Koeffizienten der Unbekannten sind dieselben, wie diejenigen der unbekannt gewesenen Kernpunktskoordinaten. Die Auflösung ergibt folgende Werte:

$Q_{11} = +92{,}50$ $Q_{12} = Q_{21} = +36{,}42$ $Q_{13} = Q_{31} = +33{,}50$ $Q_{14} = Q_{41} = -47{,}60$
$Q_{22} = +19{,}41$ $Q_{23} = Q_{32} = +13{,}29$ $Q_{24} = Q_{42} = -22{,}60$
$Q_{33} = +68{,}71$ $Q_{34} = Q_{43} = -22{,}53$
$Q_{44} = +29{,}775$

Die Koeffizienten der Q_{ik} beziehen sich auf verschiedene Maßeinheiten. Bringt man sie auf dieselbe Maßeinheit (mm), so hat man:

$Q_{11} = +9250$ $Q_{12} = +1821$ $Q_{13} = +1340000$ $Q_{14} = -47600$
$Q_{22} = +485$ $Q_{23} = +265800$ $Q_{24} = -11300$
$Q_{33} = +1099360000$ $Q_{34} = -9014000$
$Q_{44} = +297750$

Die mittleren Fehler der Kernpunktskoordinaten sind:

$$m_x = m\sqrt{Q_{11}} = \pm 1{,}66 \text{ mm}$$
$$m_y = m\sqrt{Q_{22}} = \pm 0{,}38 \text{ mm}$$

$$m_{x'} = m\sqrt{Q_{33}} = \pm 573{,}3 \text{ mm}$$
$$m_{y'} = m\sqrt{Q_{44}} = \pm 9{,}44 \text{ mm}$$

Die Verbesserungen der genäherten Kernpunkte K_{I-II} und K_{II-I} sind also:

$X = +8{,}17 \pm 1{,}66$ mm
$Y = +1{,}12 \pm 0{,}38$ mm. } Für den Kernpunkt K_{I-II} im Bild I.

$X' = +562{,}4 \pm 573{,}3$ mm
$Y' = +20{,}58 \pm 9{,}44$ mm. } Für den Kernpunkt K_{II-I} im Bild II.

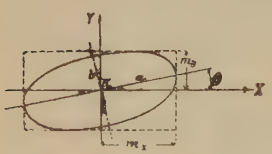
Koordinaten der genauen Kernpunkte.

	Bild I	Bild II
	Der Nullpunkt liegt im Hauptpunkt und die x-Achse geht durch den genäherten Kernpunkt	
x	+ 251,63 ± 1,66 mm	— 4517,43 ± 573,3 mm
y	+ 1,12 ± 0,38 mm	+ 20,58 ± 9,44 mm
	Das Achsensystem parallel zu den Bildrändern gedreht.	
x	+ 251,62 mm	— 4438,39 mm
y	+ 6,60 mm	+ 842,70 mm

Die große Unsicherheit des Kernpunktes K_{II-I} auf Bild II ist eine Folge seiner großen Entfernung vom Hauptpunkt (4,5 m).

Die mittleren Fehler der Koordinaten eines Kernpunktes bestimmen ein Rechteck um diesen, in welches die Fehlerellipse einbeschrieben ist.

Die X-Achse geht durch den Hauptpunkt.



Der Winkel Θ ist so zu wählen, daß sin Θ das Vorzeichen von Q_{12} und cos Θ „ „ „ $Q_{11}-Q_{22}$ hat.

Die folgenden Formeln sind dem Handbuche für Vermessungskunde von G. Jordan entnommen.

$$tg\ 2\,\Theta = \frac{2\,Q_{12}}{Q_{11}-Q_{22}} \qquad Q = \sqrt{(Q_{11}-Q_{22})^2 + 4\,Q^2{}_{12}}$$

$$a^2 = (Q_{11}+Q_{22}+Q)\,\frac{m^2}{2};\quad b^2 = (Q_{11}+Q_{22}-Q)\,\frac{m^2}{2}.$$

Die vorstehenden Formeln gelten für Bild I. Bei Bild II hat man

Q_{33}, Q_{34}, Q_{44} statt Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}.

Bei Bild I hat man für den genauen Kernpunkt K_{I-II}:
$\Theta = +\ 11^0\ 17'$ $a = 1{,}697$ mm $b = 0{,}192$ mm.

Bei Bild II hat man für den genauen Kernpunkt K_{II-I}:
$\Theta = -\ 0^0\ 28'$ $a = 573{,}5$ mm $b = 8{,}28$ mm.

Als Kontrolle hat man $a^2 + b^2 = m_x^2 + m_y^2$.

Für Bild I: $2{,}878 + 0{,}0367 = 2{,}767 + 0{,}1452$

$2{,}914 \simeq 2{,}912$

Für Bild II: $328800 + 68{,}6 = 328700 + 89{,}1$

$328868 \simeq 328789.$

B. Ausgleichung der Kernpunkte von Bild I und III.

Die analoge Aufgabe wie in § 3 S. 14 wird hier etwas anders behandelt.

Jeder der beiden Kernpunkte fällt hier noch auf das Zeichenblatt. Die Koordinaten-Achsen werden so gedreht, daß in jedem Bild die positive x-Achse durch den Kernpunkt geht, und der Ursprungspunkt mit dem Hauptpunkt zusammenfällt.

Abmessungen im Bild I.

Punkt		Bildrandabstände, aus dem Bild abgegriffen mm			Rahmenabstände, auf eine Bildweite von 151 mm reduziert mm		
		Linker unterer Rand	Rechter oberer Rand	Bildbreite	Linker unterer Rand	Rechter oberer Rand	Rahmenbreite
1	x	125,66	18,15	143,81	125,52	18,13	143,65
	y	6,99	96,92	103,91	7,00	97,00	104,00
2	x	82,92	60,89	143,81	82,83	60,82	143,65
	y	13,05	90,84	103,89	13,06	90,94	104,00
3	x	17,26	126,56	143,82	17,24	126,41	143,65
	y	10,05	93,85	103,90	10,06	93,94	104,00
4	x	9,89	133,86	143,75	9,88	133,77	143,65
	y	85,25	18,59	103,84	85,38	18,62	104,00
5	x	42,10	101,65	143,75	42,07	101,58	143,65
	y	65,85	38,06	103,91	65,91	38,09	104,00
6	x	68,00	75,75	143,75	67,95	75,70	143,65
	y	75,77	28,15	103,92	75,83	28,17	104,00
7	x	143,15	0,63	143,78	143,02	0,63	143,65
	y	30,23	73,65	103,88	30,26	73,74	104,00
*K_{I-III}	x	293,51	—149,73	143,78	293,22	—149,58	143,64
	y	61,13	42,76	103,89	61,19	42,81	104,00

*) Genäherter Kernpunkt K_{I-III}.

Abmessungen im Bild III.

Punkt		Bildrandabstände, aus dem Bild abgegriffen mm			Rahmenabstände, auf eine Bildweite von 151 mm reduziert mm		
		Linker unterer Rand	Rechter oberer Rand	Bildbreite	Linker unterer Rand	Rechter oberer Rand	Rahmenbreite
1	x	11,76	132,02	143,78	11,75	131,90	143,65
	y	15,38	88,49	103,87	15,40	88,60	104,00
2	x	15,58	128,20	143,78	15,57	128,08	143,65
	y	33,19	70,65	103,84	33,24	70,76	104,00
3	x	13,53	130,28	143,81	13,51	130,14	143,65
	y	43,16	60,68	103,84	43,23	60,77	104,00
4	x	114,05	29,74	143,79	113,94	29,71	143,65
	y	78,46	25,45	103,91	78,53	25,47	104,00
5	x	60,36	83,41	143,77	60,31	83,34	143,65
	y	72,06	31,85	103,91	72,12	31,88	104,00
6	x	130,52	13,26	143,78	130,40	13,25	143,65
	y	69,36	34,49	103,85	69,46	34,54	104,00
7	x	56,12	87,68	143,80	56,06	87,59	143,65
	y	19,93	83,95	103,88	19,95	84,05	104,00
*K_{III-I}	x	—203,39	347,18	143,79	—203,18	346,82	143,64
	y	130,58	—26,71	103,87	130,74	—26,74	104,00

Bei den folgenden Tabellen ist der Koordinaten-Ursprungspunkt in den Hauptpunkt gelegt.

Koordinaten im Bild I.

Punkt		Vor der Drehung	Nach der Drehung
4	x	— 61,94	— 60,41
	y	+ 33,84	+ 36,51
6	x	— 3,87	— 2,81
	y	+ 24,29	+ 24,44
5	x	— 29,75	— 29,09
	y	+ 14,37	+ 15,66
3	x	— 54,58	— 56,34
	y	— 41,48	— 39,06
7	x	+ 71,20	+ 70,20
	y	— 21,28	— 24,36
2	x	+ 11,01	+ 9,32
	y	— 38,48	— 38,92
1	x	+ 53,70	+ 51,71
	y	— 44,54	— 46,84
K_{I-III}	x	+221,4	+221,61
	y	+ 9,65	± 0,0

$$tg\,\psi = + \frac{9{,}65}{221{,}4}$$

Koordinaten im Bild III.

Punkt		Vor der Drehung	Nach der Drehung
4	x	+ 42,12	+ 33,01
	y	+ 26,99	+ 37,59
6	x	+ 58,58	+ 51,33
	y	+ 17,92	+ 33,43
5	x	— 11,51	— 16,75
	y	+ 20,58	+ 16,60
3	x	— 58,31	— 53,73
	y	— 8,31	— 24,12
7	x	— 15,76	— 6,41
	y	— 31,59	— 34,72
2	x	— 56,25	— 48,99
	y	— 18,30	— 33,15
1	x	— 60,07	— 47,73
	y	— 36,14	— 51,35
K_{III-I}	x	— 275,0	— 286,18
	y	+ 79,2	± 0,0

$$tg\,\psi = - \frac{79{,}2}{275{,}0}$$

*) Genäherter Kernpunkt K_{III-I}.

Die Winkel α_i und ${}_0\alpha_i$ werden auf dieselbe Weise berechnet wie bei der Ausgleichung der Kernpunkte von Bild I und II. Der größte Unterschied zweier entsprechender Winkel beträgt auch hier ca. $^1/_4{}^0$.

Zur Berechnung der Winkeländerungen der Kernebenenbüschel bei sich ändernden Kernpunktskoordinaten wurden bei diesem Bilderpaar die Differentialquotienten der Funktion für α_i nach den beiden Kernpunktskoordinaten als unabhängig Veränderliche benützt. Die Formel von der man ausgeht:

$$tg\ \alpha_i = \sqrt{1 + \left(\frac{r}{D}\right)^2} \cdot \frac{y_i}{r - x_i}. \quad \text{(S. S. 17).}$$

Für den Kernpunkt werden Polarkoordinaten eingeführt mit dem Fahrstrahl r und dem Drehungswinkel ω. Wird der Fahrstrahl mit dem Kernpunkt um den Winkel ω gedreht, so hat man für ein anderes $\bar{\alpha}_i$:

$$tg\ \bar{\alpha}_i = \sqrt{1 + \left(\frac{r}{D}\right)^2} \cdot \frac{y_i \cdot cos\ \omega - x_i \cdot sin\ \omega}{r - (x_i\ cos\ \omega + y_i\ sin\ \omega)}$$

Für $\omega = 0$ geht die Formel wieder in die vorhergehende über.

Es ist zu bilden $\frac{\delta \alpha_i}{\delta r}$ und $\frac{\delta \alpha_i}{\delta \omega}$.

$$\text{Hieraus } \frac{\delta \alpha_i}{\delta r} = \frac{\delta tg\, \alpha_i}{\delta r} \cdot \frac{1}{1 + tg^2 \alpha_i}$$

$$\frac{\delta tg\, \alpha_i}{\delta r} = \frac{y_i}{D} \cdot \frac{(r - x_i) \cdot \frac{r}{\sqrt{D^2 + r^2}} - \sqrt{D^2 + r^2}}{(r - x_i)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{r}{D}\right)^2} \cdot \frac{y_i}{r - x_i} \cdot \frac{-D^2 - r \cdot x_i}{(r - x_i) \cdot (D^2 + r^2)}$$

$$\frac{\delta tg\, \alpha_i}{\delta r} = -tg\, \alpha_i \cdot \frac{D + \frac{r}{D} \cdot x_i}{D \cdot \left[1 + \left(\frac{r}{D}\right)^2\right] \cdot (r - x_i)}$$

$$\frac{\delta \alpha_i}{\delta r} = -\frac{1}{D \cdot \left[1 + \left(\frac{r}{D}\right)^2\right]} \cdot \frac{tg\, \alpha_i}{1 + tg^2 \alpha_i} \cdot \frac{D + \frac{r}{D} \cdot x_i}{r - x_i}.$$

Der erste Faktor dieses Ausdruckes ist für ein Bild konstant; die Ausdrücke $\frac{tg\,\alpha_i}{1+tg^2\,\alpha_i}$ und $\frac{D+\frac{r}{D}\cdot x_i}{r}$ lassen sich bequem mit dem Rechenschieber ermitteln.

$$\frac{\delta\,\alpha_i}{\delta\,\omega}=\frac{\delta\,tg\,\alpha_i}{\delta\,\omega}\cdot\frac{1}{1+tg^2\,\alpha_i}$$

$$\frac{\delta\,tg\,\alpha_i}{\delta\,\omega}=\sqrt{1+\left(\frac{r}{D}\right)^2}\cdot$$

$$\frac{(r-x_i-y_i\cdot\sin\omega)(-x_i\cos\omega)-(y_i-x_i\cdot\sin\omega)(-y_i\cdot\cos\omega)}{(r-x_i-y_i\cdot\sin\omega)^2}$$

Für $\omega=0$ wird

$$\frac{\delta\,tg\,\alpha_i}{\delta\,\omega}=\sqrt{1+\left(\frac{r}{D}\right)^2}\cdot\frac{y_i}{r-x_i}\cdot\frac{y_i^2-x_i\,(r-x_i)}{y_i\cdot(r-x_i)}$$

$$\frac{\delta\,\alpha_i}{\delta\,\omega}=\frac{tg\,\alpha_i}{1+tg^2\,\alpha_i}\cdot\left[\frac{y_i}{r-x_i}-\frac{x_i}{y_i}\right].$$

Die Änderung des Winkels α_i bezieht sich dabei auf Bogenmaß. Will man sie im Gradmaß, so hat man die beiden Ausdrücke mit $57,^0296=\frac{180^0}{\pi}$ zu multiplizieren.

Die beiden Ausdrücke sind für die verschiedenen Punkte $(x_i\,y_i)$ bequem mit dem Rechenschieber auszuwerten, um so mehr, als sich die Glieder $\frac{tg\,\alpha_i}{1+tg^2\,\alpha_i}$ und $(r-x_i)$ wiederholen. Die Ausrechnung geschieht am besten tabellarisch, mit Rubriken für die einzelnen Faktoren.

Die Änderung von r bezieht sich auf die Maßeinheit, das sind Millimeter, diejenige von ω auf die Einheit im Bogenmaß.

Damit die Koeffizienten der Fehlergleichungen in ihrer Stellenzahl wieder einander möglichst gleich wurden, wählte man für die Änderung von r als Maßeinheit 10 mm, für die Änderung von ω $^1/_{100}$ der Bogeneinheit $=0,^0573$.

In den nachfolgenden Tabellen beziehen sich die Größen auf eine Kernebenenrichtung, welche wieder das arithmetische Mittel aus den α_i darstellt.

Kernebenenwinkel im Bild I. (Gradmaß).

Punkt	${}_0\alpha_i$ für den genäherten Kernpunkt K_{I-III}	$\frac{\delta\alpha}{\delta r}$ pro 10 mm	$\frac{\delta\alpha}{\delta\omega}$ pro $^1/_{100}$ Bogeneinheiten
4	+19,°2128	−0,23656	+0,22713
6	+17,°2111	−0,3252	+0,02793
5	+12,°5952	−0,23545	+0,12458
3	− 7,°7479	−0,1090	+0,21718
7	− 9,°6806	+0,3548	−0,40797
2	−11,°7691	+0,0960	−0,00543
1	−19,°8217	+0,4555	−0,18342

Kernebenenwinkel im Bild III. (Gradmaß).

Punkt	${}_0\alpha_i$ für den genäherten Kernpunkt K_{III-I}	$\frac{\delta\alpha}{\delta r}$ pro 10 mm	$\frac{\delta\alpha}{\delta\omega}$ pro $^1/_{100}$ Bogeneinheiten
4	+19,°1922	+0,1554	+0,1893
6	+17,°0123	+0,1278	+0,2442
5	+12,°5500	+0,1738	−0,01656
3	− 7,°5067	−0,0892	−0,2039
7	− 9,°8629	−0,0185	+0,04532
2	−11,°6431	−0,1323	−0,15675
1	−19,°7420	−0,2171	−0,10175

Die Berechnung der Koeffizienten der Fehlergleichungen mit Hilfe der abgeleiteten Differentialquotienten ist dann anzuraten, wenn die Winkeldifferenzen der beiden Kernebenenbüschel gering sind, und die Kernpunkte nahe am Hauptpunkt liegen, denn die Verbesserungen der letzteren werden dann ziemlich klein werden. Werden dagegen die Unstimmigkeiten der Kernebenenwinkel größer, und fällt der eine oder die beiden Kernpunkte weit vom Bild weg, so wird man gut tun, die bei der Ausgleichung der Bilder I und II benützte Methode zu wählen, bei der man durch geschickte Wahl der Verschiebungsgrößen, auch ihrem Vorzeichen nach, den sich nachher ergebenden Verbesserungen ziemlich nahe kommen kann. Für den Fall, daß der eine Kernpunkt sehr weitab gelegen ist, hilft man sich am besten auf eine Weise, wie sie im Nachtrag S. 40 angedeutet ist.

Die Fehlergleichungen lauten nun:

$$-0{,}2366\,X + 0{,}2271\,Y - 0{,}1554\,X' - 0{,}1893\,Y' + 0{,}0206 = v_4$$
$$-0{,}3252\,X + 0{,}02793\,Y - 0{,}1278\,X' - 0{,}2442\,Y' + 0{,}1988 = v_6$$
$$-0{,}2354\,X + 0{,}1246\,Y - 0{,}1738\,X' + 0{,}01656\,Y' + 0{,}0452 = v_5$$
$$-0{,}1090\,X + 0{,}2172\,Y + 0{,}0892\,Y' + 0{,}2039\,Y' - 0{,}2412 = v_3$$
$$+0{,}3548\,X - 0{,}4080\,Y + 0{,}0185\,X' - 0{,}04532\,Y' + 0{,}1823 = v_7$$
$$+0{,}0960\,X - 0{,}00543\,Y + 0{,}1323\,X' + 0{,}1567\,Y' - 0{,}1260 = v_2$$
$$+0{,}4555\,X - 0{,}1834\,Y + 0{,}2171\,X' + 0{,}1017\,Y' - 0{,}0797 = v_1$$

Die daraus abgeleiteten Normalgleichungen lauten:

$$+0{,}57165\,X - 0{,}3446\,Y + 0{,}2277\,X' + 0{,}14335\,Y' - 0{,}03757 = 0$$
$$-0{,}3446\,X + 0{,}3152\,Y - 0{,}08923\,X' - 0{,}00449\,Y' - 0{,}09563 = 0$$
$$+0{,}2277\,X - 0{,}08923\,Y + 0{,}1436\,X' + 0{,}1179\,Y' - 0{,}08858 = 0$$
$$+0{,}14335\,X - 0{,}00449\,Y + 0{,}1179\,X' + 0{,}17426\,Y' - 0{,}1370 = 0$$

Für die Unbekannten erhielt man die Werte:

$$X = +0{,}2167 \qquad X' = +0{,}3712$$
$$Y = +0{,}6510 \qquad Y' = +0{,}3735$$

Rechnet man jetzt die ausgeglichenen Kernebenenwinkel und deren Widersprüche nach den beiden Arten wie beim vorhergehenden Bilderpaar S. 21, so hat man folgende Tabelle:

Die Kernebenenwinkel nach der Ausgleichung.

Kern-ebene	Bild I	Bild III	v_i aus den Fehler-gleichungen	V_i aus der Neu-rechnung mit den verbesser-ten Kernpunkten
4	+ 19,3098	+ 19,3203	— 0,0112	— 0,0110
6	+ 17,1608	+ 17,1509	+ 0,0079	+ 0,0099
5	+ 12,6263	+ 12,6105	+ 0,0170	+ 0,0158
3	— 7,6293	— 7,6163	— 0,0141	— 0,0130
7	— 9,8699	— 9,8516	— 0,0165	— 0,0183
2	— 11,7525	— 11,7511	— 0,0011	— 0,0014
1	— 19,8455	— 19,8631	+ 0,0182	+ 0,0176

$$[v\,v] = 0{,}001280842$$
$$[V\,V] = 0{,}00128426$$

Der mittlere Fehler einer Kernebenenrichtung ist;

$$m = \sqrt{\frac{[V\,V]}{7-4}} = \sqrt{\frac{0{,}00128426}{3}} = \pm\,0{,}^{0}02069 = \pm\,1',24.$$

Zur Berechnung der mittleren Fehler der Kernpunktskoordinaten hat man wieder die Q_{ik} zu ermitteln.

Man erhält:

$$Q_{11} = +19{,}995 \quad Q_{12} = Q_{21} = +16{,}55 \quad Q_{13} = Q_{31} = -18{,}57 \quad Q_{14} = Q_{41} = 3{,}454$$
$$Q_{23} = +18{,}74 \quad Q_{23} = Q_{32} = -8{,}565 \quad Q_{24} = Q_{42} = -7{,}335$$
$$Q_{33} = +42{,}1 \quad Q_{34} = Q_{43} = -13{,}445$$
$$Q_{44} = +17{,}48$$

Auf den Millimetermaßstab umgerechnet:

$Q_{11} = +1999{,}5$ $Q_{12} = +366{,}7$ $Q_{13} = -1857$ $Q_{14} = -98{,}8$
$Q_{22} = +92{,}0$ $Q_{23} = -189{,}8$ $Q_{24} = -46{,}5$
$Q_{33} = +4210$ $Q_{34} = -384{,}8$
$Q_{44} = +143{,}2$

Die Verbesserungen der genäherten Kernpunkte sind also:

$X = +2{,}17 \pm 0{,}926$ mm
$Y = +1{,}44 \pm 0{,}198$ mm
Für den Kernpunkt $K_{\text{I-III}}$ im Bild I.

$X' = +3{,}71 \pm 1{,}34$ mm
$Y' = +1{,}07 \pm 0{,}247$ mm
Für den Kernpunkt $K_{\text{III-I}}$ im Bild III.

Koordinaten der genauen Kernpunkte.

	Bild I	Bild III
	Der Nullpunkt liegt im Hauptpunkt und die X-Achse geht durch den genäherten Kernpunkt	
x	$+223{,}78 \pm 0{,}93$ mm	$-282{,}47 \pm 1{,}34$ mm
y	$+1{,}44 \pm 0{,}20$ mm	$+1{,}07 \pm 0{,}25$ mm
	Das Achsensystem parallel zu den Bildrändern gedreht	
x	$+223{,}51$ mm	$-271{,}15$ mm
y	$+11{,}18$ mm	$+79{,}22$ mm

Die Abmessungen der Fehlerellipse sind für Bild I:

$\Theta = +10^{0}31'$ $a = 0{,}94$ mm $b = 0{,}101$ mm

für Bild III:

$\Theta = -5^{0}21'$ $a = 1{,}347$ mm $b = 0{,}213$ mm.

Die Rechenproben stimmen bis auf unvermeidliche Rechenungenauigkeiten.

Man sieht hieraus wieder, daß der Kernpunkt in der Richtung auf den Hauptpunkt zu schlecht, quer dazu aber gut bestimmt ist.

§ 4.

Die Konstruktion des Objektes und der Vergleich mit direkten Messungen.

Die aus der Rechnung erhaltenen Verbesserungen der Kernpunkte werden in die Zeichenblätter eingetragen. Es sind nun die Nadirpunkte und die gegenseitige Lage der Bilder so zu ändern, daß sie den gewonnenen genauen Kernpunkten entsprechen. Bei jedem Bilderpaar (I—II und I—III) liegen jetzt entsprechende Bildpunkte bis auf den Widerspruch V_i, der unterhalb der unvermeidlichen Zeichenfehler bleibt, in derselben Kernebene. Auch die Nadirpunkte können als entsprechende Bildpunkte aufgefaßt werden, sie müssen also in derselben Kernebene liegen. Wird der eine Nadirpunkt vorgeschrieben, so hat der andere einen bestimmten Kernstrahl als geometrischen Ort. Dazu kommt noch, daß der Strahl vom perspektivischen Zentrum zum Nadirpunkt im einen Bild dem im anderen Bild parallel sein muß. Die Winkel dieser beiden Strahlen mit der Verbindungsgeraden der perspektivischen Zentren ergänzen sich also zu 180°, und damit ist der Nadirpunkt im zweiten Bild bestimmt, sobald derjenige im ersten Bild vorgeschrieben ist.

Der Nadirpunkt des Bildes I liegt dem Hauptpunkt am nächsten, die Annäherung an den wirklichen Nadirpunkt wird also hier besser sein als in den beiden anderen Bildern, weil die Strahlen, die zu seiner Auffindung führten, verhältnismäßig die besten Schnitte ergaben. Es wird also der Nadirpunkt des Bildes I beibehalten und in den anderen Bildern die ihm entsprechenden Nadirpunkte bestimmt.

Bei der darstellenden geometrischen Konstruktion wird zuerst der Kernstrahl im zweiten Bild, der dem Kernstrahl zum Nadirpunkt des Bildes I entspricht, mit Hilfe des Kernebenenwinkels gegen einen bestimmten Objektpunkt gezeichnet. Dann wird die Ebene, in der der gegebene Nadirpunkt, die beiden perspektivischen Zentren und die beiden gegnerischen Kernpunkte liegen in jedem Bild um den Kernstrahl zum Nadirpunkt umgeklappt. Das umgeklappte perspektivische

Zentrum bildet in beiden Bildern den Scheitel eines Winkels, dessen einer Schenkel durch den Kernpunkt, und dessen anderer durch den Nadirpunkt geht. Im ersten Bild ist dieser Winkel gegeben, derjenige im zweiten Bild ist das Supplement davon, und damit ist der gesuchte Nadirpunkt als Schnitt des Kernstrahles mit dem anzutragenden Winkelschenkel gefunden. Dieselbe Konstruktion hat man beim Bilderpaar I—III. Damit hat man erreicht, daß die drei Nadirpunkte auf Bildstrahlen liegen, die einander parallel sind. Mit der Lotrichtung werden diese drei Strahlen aber nur genähert übereinstimmen, weil der Nadirpunkt im Bild I auch nur ein Näherungsort des wirklichen Nadirpunktes ist. Auf diesen Umstand wird später zurückgegriffen.

Aus den verbesserten Kern- und Nadirpunkten kann jetzt der Grundriß der Standpunkte hergestellt werden.

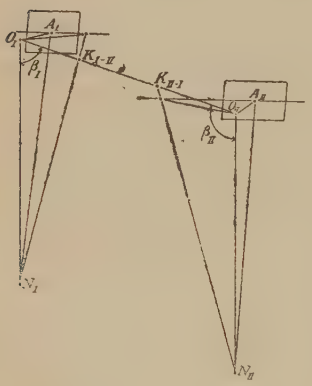
Der Bildstrahl durch den Kernpunkt und derjenige durch einen solchen Objektpunkt, der auf allen drei Bildern erscheint, z. B. die Kirchturmspitze, wird in jedem Bild auf die Horizontalebene durch den verbesserten Horizont projiziert. Man erhält so für jedes Bild ein Strahlbüschel, dessen Träger im perspektivischen Zentrum liegt. Im Strahlbüschel des Bildes I sind drei Strahlen vorhanden; einer geht durch den Grundriß der Kirchturmspitze, und zwei durch die Grundrisse der beiden anderen Standpunkte. Man zeichnet dieses Strahlbüschel auf das Blatt, das der Lageplan werden soll, und trägt auf den Strahl der vom Träger, das ist der Grundriß des Standpunktes I, zum Grundriß des Standpunktes III hingeht, das Strahlbüschel des Bildes III auf, so daß sein entsprechender Strahl mit dem erstgenannten Strahl zur Deckung kommt. Damit erhält man für die Kirchturmspitze den Grundriß als Schnittpunkt der beiden Strahlen, auf denen er zu liegen hat. Auf dem Strahl, der zum Grundriß des Standpunktes II hingeht, trägt man das Strahlbüschel des Bildes II in derselben Weise auf, sein Strahl zum Grundriß der Kirchturmspitze wird aber dann nicht durch den vorhin gefundenen Schnittpunkt hindurch gehen; durch Parallelverschiebung des Strahlbüschels II auf dem Strahl I—II kann das aber erreicht werden.

Damit ist der genaue Grundriß I—II′—III′ der drei Standpunkte bis auf den Maßstab gefunden.

Hätte man die Kernpunkte des dritten Bilderpaares auch einer Ausgleichung unterzogen, so hätte man den Grundriß der drei Standpunkte auch finden können ohne einen Objektpunkt zu Hilfe nehmen zu müssen und hätte für die drei Dreieckswinkel des Dreiecks I—II′—III′ (Tafel) in ihrer Summe eine Kontrolle gehabt.

Die Kernpunkte des Bilderpaares II—III wurden unter Benützung des Grundrisses der drei Standpunkte (I—II′—III′) konstruiert, und zur Kontrolle die beiden Kernebenenbüschel graphisch miteinander verglichen, wobei sich keine wahrnehmbaren Unterschiede zeigten.

Zur Bestimmung des relativen Höhenunterschiedes der drei Standpunkte benützt man wieder die Supplementswinkel, die bei der Verbesserung der Nadirpunkte eine Rolle gespielt haben. Der Höhenunterschied zweier Standpunkte ist gleich ihrer Entfernung im Grundriß, multipliziert mit der Kotangente des spitzen der beiden Supplementswinkel. Die Verbindungsgerade der beiden perspektivischen Zentren O_I und O_{II} bildet mit den Lotlinien durch O_I und O_{II} die Winkel β_I und β_{II}, die sich zu 180 ° ergänzen.



Jeder Objektpunkt, der auf zwei oder drei Bildern erscheint, kann jetzt als Schnittpunkt der entsprechenden Bildstrahlen gezeichnet werden. Die darstellende geometrische Konstruktion zur Auffindung eines Objektpunktes soll kurz erläutert werden.

Für jeden Objektpunkt läßt sich in dem Strahlbüschel, das in der Horizontalebene jedes Bildes liegt, ein Strahl als Horizontalprojektion seines Bildstrahles zeichnen, es ist der Schnitt der Lotebene durch perspektivisches Zentrum und

Bildpunkt mit der Horizontalebene. Für jedes Bild wird dieser Strahl in das kongruente Strahlbüschel im Lageplan übertragen; der Schnittpunkt zusammengehöriger Strahlen liefert dann den Grundriß des Objektpunktes.

Um den Höhenunterschied dieses Objektpunktes vom Standpunkt des Bildes I z. B. zu erhalten, wird die Lotebene, von der vorhin die Rede war, um ihre Schnittgerade mit der Bildebene in die Bildebene umgelegt. Der Neigungswinkel des Bildstrahles zur Horizontalen erscheint dann in wirklicher Größe, und der verlangte Höhenunterschied ist gleich der Entfernung des Objektpunktes vom Standpunkt I im Grundriß multipliziert mit der Tangente dieses Neigungswinkels.

Praktisch wird man zuerst die Lotebene durch die Hauptvertikale umklappen, und dann die anderen umgeklappten Lotebenen alle so legen, daß das umgelegte perspektivische Zentrum, das in jeder Lotebene den Scheitel eines rechten Winkels bildet, mit dem der ersten Lotebene zusammenfällt. Die Schenkel der rechten Winkel fallen dann auch alle aufeinander, und dadurch vermindert sich die Zeichenarbeit. Auch die Berechnung des Höhenunterschiedes wird man graphisch durchführen.

Für jeden Objektpunkt kann man so die Höhenunterschiede von den zwei oder drei Standpunkten, aus denen er gewonnen wurde, ermitteln. Die Differenz dieser Höhenunterschiede muß dann dem Höhenunterschied der jeweiligen Standpunkte gleich sein, damit hat man eine Kontrolle für die Richtigkeit der Konstruktion.

Kehren wir zum Lageplan zurück, so ist der Maßstab, in dem er gezeichnet ist, unbekannt, weil das Verhältnis der Entfernungen der drei Standpunktgrundrisse zur Wirklichkeit beliebig gewählt werden mußte. Zur Ermittelung des Maßstabes müssen einige Objektpunkte, die man im Katasterblatt scharf finden kann, konstruiert, und das Verhältnis ihrer Verbindungsstrecken mit den entsprechenden Strecken im Katasterblatt, unter Berücksichtigung des Papiereinganges, gerechnet werden.

Strecke	Strecke im Lagerplan	Strecke im Katasterblatt	Verhältnis der beiden Strecken
	m	m	
$a'\ b'$	105,7	102,0	1,036
$a'\ S'$	168,75	162,9	1,036
$a'\ d'$	338,0	325,1	1,0395
$b'\ S'$	80,15	76,85	1,0425
$b'\ d'$	275,0	264,5	1,040
$S'\ d'$	197,0	190,0	1,037
$a'\ e'$	155,75	149,5	1,041
$b'\ e'$	140,7	136,0	1,035

Das arithmetische Mittel aus diesen Verhältnissen ist: 1,038.

In diesem Verhältnis ist also das Dreieck der Standpunktgrundrisse I—II′– III′ zu verkleinern, um das Objekt im Maßstab 1 : 2500 darstellen zu können.

Für die Punkte der genannten Strecken ergab sich nach der Umrechnung um das Verhältnis 1,038 ein mittlerer Fehler von 0,44 m, das sind im Maßstab 1 : 2500 0,2 mm.

Wurden diese Punkte im Maßstab 1 : 2500 neu konstruiert, und die Strecken mit den entsprechenden im Katasterblatt aufs neue verglichen, so ergab sich ein mittlerer Fehler von 0,73 m, das sind im Maßstab 1 : 2500 0,3 mm. Dieser Unterschied beruht auf Zeichenungenauigkeiten, die die Punktbestimmung um annähernd 0,5 m unsicher machen.

Man hätte als mittleres Verhältnis nicht das arithmetische Mittel zu nehmen brauchen, sondern hätte auch eine systematische Ausgleichung anwenden können.

Wenn Pläne des abgebildeten Komplexes nicht vorhanden sind, so hätte man bei der Ermittelung des Maßstabes gewisse Abmessungen am Objekt wie die Breite einer Chaussee oder die Entfernung von abgebildeten Telegraphenstangen usw. ausfindig zu machen.

Es wurde eine Reihe von Punkten, wie die vordere Umgrenzung des Schlosses, ein Teil der Schloßhofmauer, die Vorderseite einiger Häuser, der Dachfirst des nördlichen Schloßtraktes usw. gezeichnet, und der Höhenunterschied

dieser Punkte zu den Standpunkten ermittelt. Bei der Bestimmung der Höhen erhielt man für die Höhendifferenz der Standpunkte eine Reihe von Werten, die kleine Unterschiede gegeneinander zeigten.

Punkt	Höhenunterschied vom Standpunkt I	Höhenunterschied vom Standpunkt II	Höhenunterschied vom Standpunkt III	Höhendifferenz der Standpunkte I—II	Höhendifferenz der Standpunkte II—III	Höhendifferenz der Standpunkte I—III
	m	m	m	m	m	m
1	197,9	154,8	108,3	43,1	46,5	
2	192,1	148,5		43,6		
S*)	129,4	86,0	40,3	43,4	45,7	
3	186,1	142,3		43,8		
4	183,7	140,5		43,2		
5	182,1	139,2		42,9		
6	184,4		94,7			89,7
7	182,3	139,2		43,1		
8	182,1	138,8		43,3		
9	181,5	137,7		43,8		
10	193,3	149,8		43,5		
11	195,6	152,3		43,3		
12	197,4	153,7		43,7		
13	157,7	114,0	68,0	43,7	46,0	
14	157,6	113,8	67,9	43,8	45,9	
15	171,6	128,1	82,1	43,5	46,0	
16	179,3	136,2	90,3	43,1	45,9	

Das arithmetische Mittel der Höhendifferenzen (bei den Standpunkten I—II: 43,4 m und bei den Standpunkten II—III: 46,1 m) wurde verwendet, um für jeden Punkt den mittleren Höhenunterschied von Standpunkt I aus gemessen, zu bestimmen. Bildet man die Differenzen dieses mittleren Höhenunterschiedes gegen die gemessenen Höhenunterschiede bei jedem Punkt, so kann man aus allen diesen Differenzen den mittleren Fehler für die Höhenbestimmung eines Punktes rechnen. Er ergab sich zu

$$\pm 0{,}198 \text{ m.}$$

Auf Seite 33 wurde erwähnt, daß die Nadirpunkte der drei Bilder zwar auf Bildstrahlen liegen, die zu einander

*) Kirchturmspitze.

parallel sind, daß aber diese Strahlen von der Lotrichtung etwas abweichen werden, weil ja der Nadirpunkt des Bildes I nur annähernd richtig ist.

Der konstruierte Punkthaufen wird also seiner wirklichen Lage zum Lot gegenüber auch etwas verdreht sein. Kennt man die Koten von drei Punkten am Objekt, auf irgend einen Horizont bezogen, so werden sie gegen die aus den Bildern ermittelten Höhen, auf denselben Horizont bezogen, Unterschiede zeigen. Die drei bekannten Koten bestimmen eine Ebene, und die drei Höhenzahlen aus den Bildern auch eine, die gegen die erste Ebene einen kleinen Winkel bildet. Um diesen Winkel ist der konstruierte Punkthaufen zu drehen, wenn seine Lage zum Lot mit der des Objektes übereinstimmen soll. Es wurden also die Koten von drei abgebildeten Objektpunkten (1, 15, 16) auf N. N. bezogen ermittelt, mit den photogrammetrisch gefundenen Höhenzahlen verglichen, und an den übrigen Höhenzahlen Verbesserungen angebracht, welche der Drehung entsprachen. Nachdem der Punkthaufen so ziemlich in einer Ebene liegt, ergeben sich diese Verbesserungen als Produkt der Entfernung des betreffenden Punktes von der Schnittgeraden *E E* der beiden Ebenen (1, 15, 16) mit dem *sinus* ihres eingeschlossenen Winkels.

Punkt 1 hat die Kote 547,9
„ 15 „ „ „ 571,0
„ 16 „ „ „ 564,4.

Der Horizont der photogrammetrisch ermittelten Höhenzahlen wurde so verschoben, daß Punkt 1 auch die Höhenzahl 547,9 bekam. Die Höhenzahl von Punkt 15 ist dann um 3,3 m und die Höhenzahl von Punkt 16 um 1,9 m größer als die betreffende Kote. Aus diesen Angaben kann die Schnittgerade *E E* der beiden Ebenen, um die der Punkthaufen zu drehen ist, im Lageplan konstruiert werden. (Siehe Tafel).

Bei der Kirchturmspitze *S*, die aus der Ebene der übrigen Punkte stark heraustritt, erleidet mit der Drehung auch der Grundriß eine kleine Verschiebung. Wäre der konstruierte

Punkthaufen räumlich ausgedehnt, so würde man zweckmäßig erst diese Drehung mitsamt den Standpunkten vornehmen, und dann den Punkthaufen konstruieren.

Bei der Ermittelung der für die Drehung benötigten Koten wurden auch die Koten der anderen konstruierten Punkte einnivelliert bzw. trigonometrisch gemessen und in die folgende Tabelle eingetragen.

Wäre z. B. das Stück eines Seeufers abgebildet, so hätte man die Ermittelung von solchen drei Koten nicht nötig. Auch zwei genügend lange Dachfirste, die annähernd aufeinander senkrecht stehen, und horizontal sind, hätte man statt dreier Koten bei der Drehung benützen können.

Punkt	Mittlerer Höhenunterschied vom Standpunkt I	Photogramm. Höhenzahl auf N. N. bezogen	Verbesserung infolge der Drehung*)	Verbesserte photogramm. Höhenzahl auf N.N. bezogen	Wirkliche Kote auf N.N. bezogen	Differenz der beiden Koten	
1	197,97	547,9	± 0,0	547,9	547,9	± 0,0**	
2	192,0	553,9	— 0,5	553,4	553,7	— 0,3	
S	129,53	616,4	— 2,15	614,3	615,1	— 0,8	Kirchturmspitze
3	185,9	560,0	— 0,6	559,4	559,6	— 0,2	
4	183,8	562,1	— 0,3	561,8	561,9	— 0,1	
5	182,35	563,5	+ 0,1	563,6	563,8	— 0,2	
6	184,3	561,6	+ 0,4	562,0	562,2	— 0.2	
7	182,45	563,4	+ 0,1	563,5			
8	182,15	563,7	— 0,2	563,5			
9	181,3	564,6	— 0,9	563,7	563,9	— 0,2	
10	193,25	552,6	— 0,1	552,5	553,0	— 0,5	
11	195,65	550,2	+ 0,2	550,4	550,4	± 0,0	
12	197,25	548,6	— 1,2	547,4	547,7	— 0,3	
13	157,53	588,4	— 1,6	586,8	587,2	— 0,4	Dachfirst
14	157,4	588,5	— 1,9	586,6	587,2	— 0,6	Dachfirst
15	171,57	574,3	— 3,3	571,0	571,0	± 0,0**	Dachgiebel
16	179,57	566,3	— 1,9	564,4	564,4	± 0,0**	

Das gleiche Vorzeichen der Differenzen der beiden Koten läßt auf einen konstanten Fehler schließen. Das arithmetische Mittel dieser Differenzen ist — 0,25. Um dieses Maß wird

*) Der Drehungswinkel beträgt 45′.

**) Übereinstimmung durch Drehung bewirkt.

jedenfalls die Höhenzahl der Punkte 1, 15 und 16 zu klein gewesen sein. Subtrahiert man — 0,25 von den genannten Differenzen, so hat man reine Beobachtungsfehler, und der mittlere Fehler hieraus ist + 0,225 m. Er ist etwas größer als der mittlere Fehler für die Höhenbestimmung eines Punktes, weil hier auch die Identifizierungsfehler der Bildpunkte mit den in der Natur nivellierten Punkten enthalten sind.

Nachtrag.

Bei der Ausgleichung der Kernpunkte des Bilderpaares I—III wurden für die Änderung der Kernebenenwinkel die Differentialquotienten ihrer Funktionen nach den beiden Polarkoordinaten des Kernpunktes gebildet. Statt des Fahrstrahles r hätte man auch den Winkel φ nehmen können, den die Verbindungsgerade vom perspektivischen Zentrum O zum Kernpunkt mit der optischen Achse (das ist die Gerade $O\,A$) einschließt.

Die beiden Winkel φ und ω bilden schon ein sphärisches Koordinatensystem. Die beiden Differentialquotienten haben gelautet:

$$\frac{\delta\,\alpha_i}{\delta\,r} = -\frac{1}{D\left[1+\left(\frac{r}{D}\right)^2\right]}\cdot\frac{tg\,\alpha_i}{1+tg^2\,\alpha_i}\cdot\frac{D+\frac{r}{D}\cdot x_i}{r-x_i}$$

$$\frac{\delta\,\alpha_i}{\delta\,\omega} = \frac{tg\,\alpha_i}{1+tg^2\,\alpha_i}\cdot\left[\frac{y_i}{r-x_i}-\frac{x_i}{y_i}\right];\quad tg\,\varphi = \frac{r}{D}.$$

Führt man statt des Fahrstrahles r den Winkel φ ein, so hat man:

$$\frac{\delta\,\alpha_i}{\delta\,\varphi} = -\frac{tg\,\alpha_i}{1+tg^2\,\alpha_i}\cdot\frac{D+x_i\cdot tg\,\varphi}{D\cdot tg\,\varphi - x_i}$$

Um die Größen Q_{ik} und die Fehlerellipse auf der Kugel zu bekommen, muß man an Stelle der Koordinaten φ und ω neue Koordinaten so einführen, daß gleichen Zunahmen dieser Koordinaten gleiche lineare Verschiebungen des Schnittpunktes auf der Kugel entsprechen.

Solche Koordinaten sind φ und $\psi = \omega\cdot sin\,\varphi_0$.

Der Koeffizient a_i der Fehlergleichungen war:

$$a_i = -\frac{57{,}296 \cdot 10}{D \cdot \left[1 + \left(\frac{r}{D}\right)^2\right]} \cdot \frac{tg\,\alpha_i}{1 + tg^2\,\alpha_i} \cdot \frac{D + \frac{r}{D} \cdot x_i}{r - x_i}$$

$r = +221{,}61$ mm.

Die Änderung von r oder die Verschiebungseinheit war dabei 10 mm. Der dieser Verschiebung entsprechende Einheitswinkel φ ist gleich 0,02037 Einheiten im Bogenmaß.

Will man für diese sphärischen Koordinaten neue Fehlergleichungen aufstellen, so ist der dafür entsprechende Koeffizient a'_i für dieselbe Verschiebung im Einheitswinkel ausgedrückt:

$$a'_i = -57{,}296 \cdot 0{,}02037 \cdot \frac{tg\,\alpha_i}{1 + tg^2\,\alpha_i} \cdot \frac{D + x_i \cdot tg\,\varphi}{D \cdot tg\,\varphi - x_i}$$

$$\frac{a_i}{a'_i} = 1{,}031$$

Beim Drehungswinkel ω ist

$$b'_i = b_i \cdot \sin\varphi_0 = b_i \cdot \sin 55{,}^{0}9894 = b_i \cdot 0{,}8289$$

$$\frac{b_i}{b'_i} = 1{,}206$$

Beim Bild III hatte man in der Richtung des Fahrstrahles auch eine Verschiebung von 10 mm. Der dieser Verschiebung entsprechende Einheitswinkel φ ist gleich 0,01484 Einheiten im Bogenmaß. Der entsprechende Koeffizient für die neuen Fehlergleichungen

$$c'_i = -57{,}296 \cdot 0{,}01484 \cdot \frac{tg\,\alpha_i}{1 + tg^2\,\alpha_i} \cdot \frac{D + x_i \cdot tg\,\varphi}{D \cdot tg\,\varphi - x_i}$$

Der Ausdruck für c_i ist derselbe wie für a_i, nur r ist gleich — 286,18 mm.

$$\frac{c_i}{c'_i} = 0{,}972$$

Beim Drehungswinkel ω im Bild III ist

$$d'_i = d_i \cdot \sin\varphi_0 = d_i \cdot \sin 61{,}^{0}8722 = d_i \cdot 0{,}8819$$

$$\frac{d_i}{d'_i} = 1{,}134$$

Bildet man aus diesen neuen Koeffizienten a'_i, b'_i, c'_i, d'_i die Normalgleichungen für die Größen Q'_{ik} als Unbekannte, so hat man:

$$[a\,a]\,Q_{11} = [a'\,a']\,Q'_{11} \qquad Q'_{11} = Q_{11} \cdot 1{,}031^2$$
$$[a\,b]\,Q_{12} = [a'\,b']\,Q'_{12} \qquad Q'_{12} = Q_{12} \cdot 1{,}031 \cdot 1{,}206$$
$$[b\,b]\,Q_{22} = [b'\,b']\,Q'_{22} \qquad Q'_{22} = Q_{22} \cdot 1{,}206^2$$
$$[c\,c]\,Q_{33} = [c'\,c']\,Q'_{33} \qquad Q'_{33} = Q_{33} \cdot 0{,}972^2$$
$$[c\,d]\,Q_{34} = [c'\,d']\,Q'_{34} \qquad Q'_{34} = Q_{34} \cdot 0{,}972 \cdot 1{,}134$$
$$[d\,d]\,Q_{44} = [d'\,d']\,Q'_{44} \qquad Q'_{44} = Q_{44} \cdot 1.134^2$$

Sollen sich die Q'_{ik} alle auf $^1/_{100}$ der Bogeneinheit beziehen, so hat man

$$Q'_{11} = Q_{11} \cdot 1{,}031^2 \cdot 2{,}037^2 = +88{,}25$$
$$Q'_{12} = Q_{12} \cdot 1{,}031 \cdot 1{,}206 \cdot 2{,}037 = +41{,}95$$
$$Q'_{22} = Q_{22} \cdot 1{,}206^2 = +27{,}27$$
$$Q'_{33} = Q_{33} \cdot 0{,}972^2 \cdot 1{,}484^2 = +87{,}5$$
$$Q'_{34} = Q_{34} \cdot 0{,}972 \cdot 1{,}134 \cdot 1{,}484 = -21{,}98$$
$$Q'_{44} = Q_{44} \cdot 1{,}134^2 = +22{,}47$$

Die mittleren Fehler dieser sphärischen Koordinaten sind:

im Bild I $m_\varphi = \pm 6{,}7'$
$m_\omega = \pm 3{,}7'$ (Minuten
im Bild III $m_\varphi = \pm 6{,}7'$ im Gradmaß).
$m_\omega = \pm 3{,}4'$

Sphärische Koordinaten der Kernpunkte.

		Bild I	Bild III
Die Nullrichtung des Fahrstrahles geht durch den genäherten Kernpunkt		Genäherte Kernpunkte	
	φ	55,°7300	62,°1821
	ω	0,°0	0,°0
		Genaue Kernpunkte	
	φ_0	55,°9894 ± 6,7'	61,°8722 ± 6,7'
	ω_0	0,°3687 ± 3,7'	0,°2171 ± 3,4'
Die Nullrichtung des Fahrstrahles liegt parallel den Bildrändern		Genäherte Kernpunkte	
	φ	55,°7300	62,°1821
	ω	2,°4957	16,°0666
		Genaue Kernpunkte	
	φ_0	55,°9894 ± 6,7'	61,°8722 ± 6,7'
	ω_0	2,°8644 ± 3,7'	16,°2837 ± 3,4'

Die mittleren Winkelfehler bedeuten also die Unsicherheit des Bildstrahles zum Kernpunkt in den beiden Koordinatenrichtungen der sphärischen Koordinaten. Will man die Unsicherheiten in den Hauptrichtungen, so hat man wieder die Formeln für die Fehlerellipse anzuwenden.

Es ist für Bild I:

$$\Theta = +27^0 \qquad a = 7{,}4' \qquad b = 1{,}7'$$

für Bild III

$$\Theta = -17^0 \qquad a = 6{,}9' \qquad b = 2{,}8'$$

Die Kontrollen stimmen bis auf unvermeidliche Rechenungenauigkeiten.

Θ ist der Winkel, den die große Hauptachse der Ellipse mit der Meridianebene für ω_0 bildet; unter der Meridianebene ist dabei jene Ebene zu verstehen, die den Bildstrahl zum Kernpunkt und die optische Achse in sich enthält.

Bild I

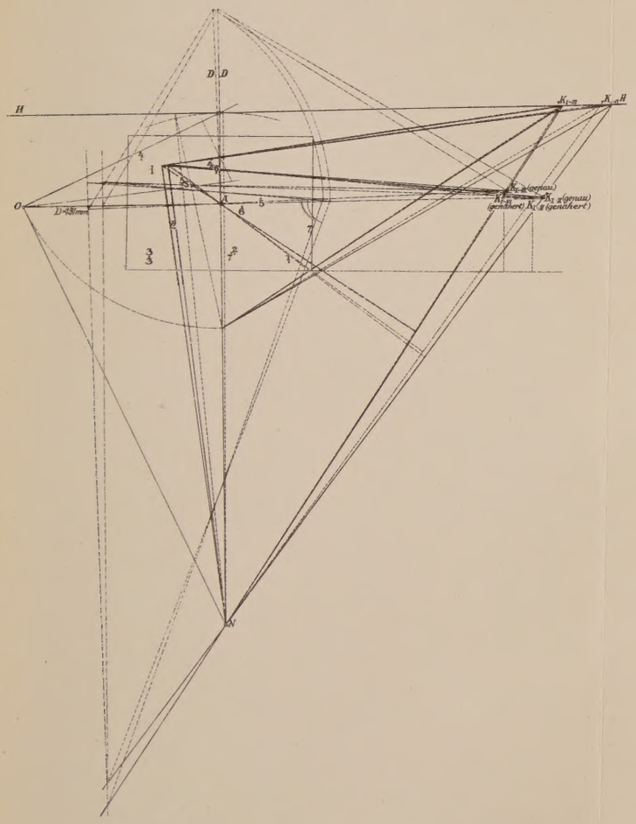


Bild II

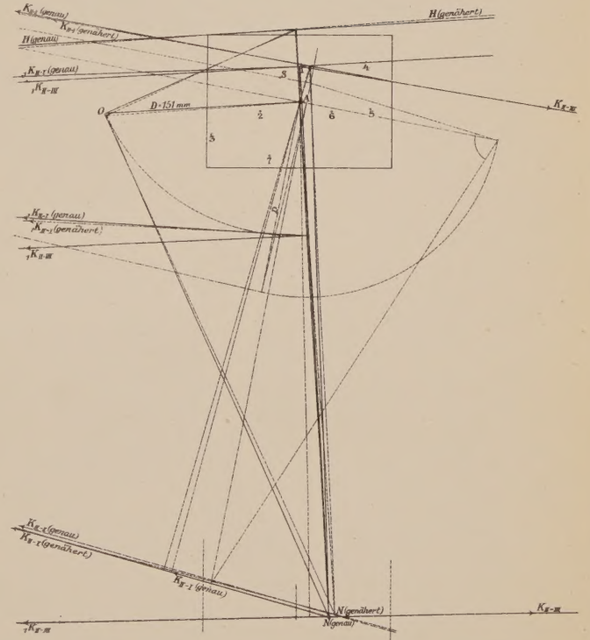
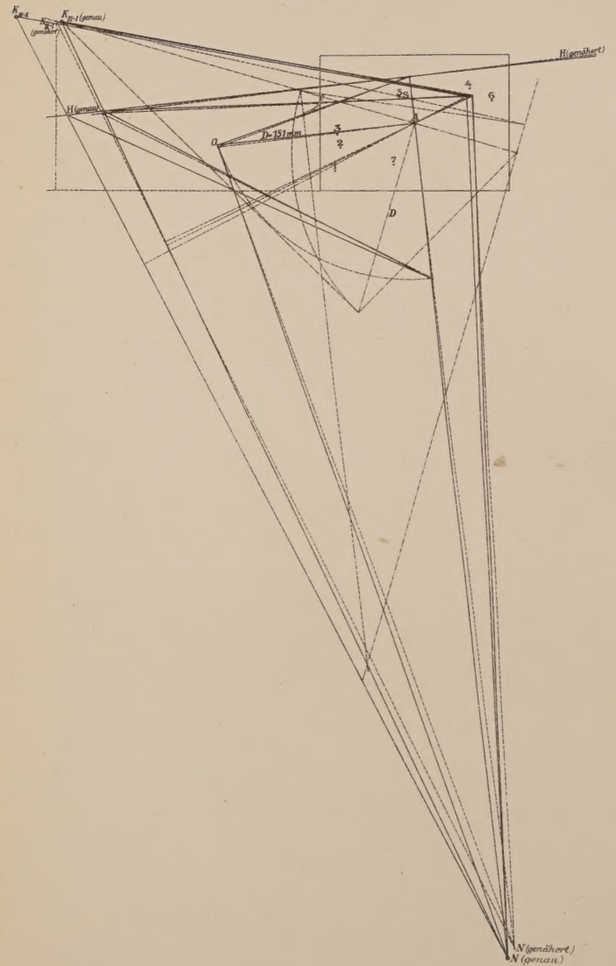
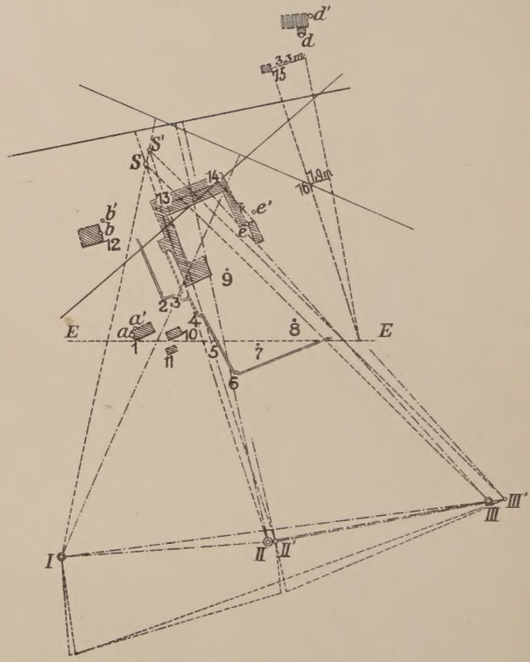


Bild III



Lageplan.

Maßstab 1:2500



Die gestrichelten Umrisse sind dem Katasterblatt entnommen.

Lith. Anst. v. Hubert Köhler München.

B. I. II. III: ½ Größe der Original-Zeichnungen.

½ Größe der Original-Zeichnung.